

《图论及其应用》复习

基础与前沿研究院

谭兵

2019年6月30日

声明：此复习资料整理自王也洲老师课堂 PPT 和作业习题，我只是搬运工，其中如有书写错误，还请见谅，另，此资料只作复习使用，更多的知识在课堂之外。

——基础与前沿研究院：谭兵

做题细心一点，时间是足够的，错的往往是自己会的，预祝各位同学考出满意的成绩。

——王也洲老师



1 图的基本概念

1.1 图的基本定义

3 个顶点的非同构的所有简单图有 4 个, 4 个顶点的非同构的所有简单图有 11 个.

Theorem 1. 若 n 阶图 G 是自补的 (即 $G \cong \bar{G}$), 则

$$n = 0, 1 \pmod{4}.$$

例: 存在 18 阶自补图 (错误, 因为 18 除以 4 的余数是 2)

k 正则图: 每个点的度均为 k 的简单图

- (1) 在任何图中, 奇点个数为偶数.
- (2) 正则图的阶数和度数不同时为奇数.

Theorem 2 (握手定理). 对任意的有 m 条边的图 $G = (V, E)$, 有

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m.$$

Definition 1. 一个图 G 的各个点的度 d_1, d_2, \dots, d_n 构成的非负整数组 (d_1, d_2, \dots, d_n) 称为 G 的度序列.

Theorem 3. 非负整数组 (d_1, d_2, \dots, d_n) 是图的度序列的充分必要条件是: $\sum d_i$ 为偶数.

Definition 2. 对于一个非负整数组 (d_1, d_2, \dots, d_n) , 若存在一个简单图 G , 以它为度序列, 则称这个数组是可图的. 可图的序列简称为可图序列或图序列.

Example 1. 试判断非负整数组

$$I = (5, 5, 3, 3, 2, 2, 2)$$

是否可图?

Solution. 7 阶图, 最大度为 5, 而且度数之和为偶数, 根据定理可得下列非负整数组

$$\Pi_1 = (4, 2, 2, 1, 1, 2)$$

$$\Pi_1 = (4, 2, 2, 2, 1, 1)$$

$$\Pi_2 = (1, 1, 1, 0, 1)$$

显然 Π_2 是可图序列, 因此 $\Pi = (5, 5, 3, 3, 2, 2, 2)$ 是可图的.

Theorem 4 (以前考过证明). 一个简单图 G 的 n 个点的度不能互不相同.

Solution. 因为图 G 为简单图, 所以 $\Delta(G) \leq n - 1$.

- 情形 1: 若 G 没有孤立点, 则

$$1 \leq d(v) \leq n - 1, \forall v \in V(G)$$

因为顶点个数为 n , 所以必有两个顶点度数相同.

- 情形 2: 若 G 仅有一个孤立点, 设 G_1 表示 G 去掉孤立点后的部分, 则

$$1 \leq d(v) \leq n - 2, \forall v \in V(G_1)$$

同理, 在 G_1 中必有两顶点度数相同.

- 情形 3: 若 G 有两个以上的孤立点, 则定理显然成立.

Definition 3. 设 n 阶图 G 的各点的度取 s 个不同的非负整数 d_1, d_2, \dots, d_s . 又设度为 d_i 的点有 b_i 个 ($\sum b_i = n$), 则称 (b_1, b_2, \dots, b_s) 为 G 的频序列.

Theorem 5 (以前考过证明). 一个 n 阶图 G 和它的补图有相同的频序列.

证明. 由补图的定义知, 点 v 在图 G 及其补图中的度数之和为 $n - 1$, 即

$$d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) = n - 1$$

因此, 若 G 中有 b_i 个度为 d_i 的点, 则这 b_i 个点在 G 的补图中的度变为 $n - 1 - d_i$.

故 G 与其补图有相同的频序列. □

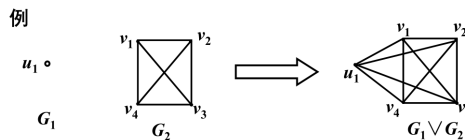
1.2 图的运算

Theorem 6. 具有 m 条边的简单标号图的生成子图的个数为 2^m .

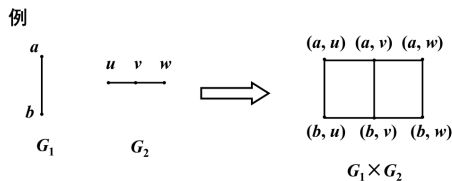
差图 $G_1 - G_2$: 在 G_1 中去掉 G_2 中的边组成的图.

对称差 $G_1 \Delta G_2$: $G_1 \Delta G_2 = (G_1 - G_2) \cup (G_2 - G_1)$.

Definition 4. 在不相交的 G_1 和 G_2 的并图 $G_1 + G_2$ 中, 把 G_1 的每个顶点和 G_2 的每个顶点连接起来所得到的图称为 G_1 和 G_2 的联图, 记为 $G_1 \vee G_2$.

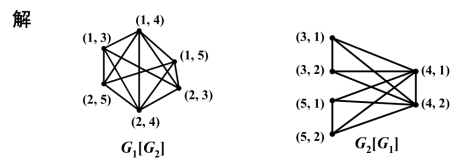


定义 设 $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, 对点集 $V = V_1 \times V_2$ 中的任意两个点 $u = (u_1, u_2)$ 和 $v = (v_1, v_2)$, 当 $(u_1 = v_1 \text{ 和 } u_2 \text{ adj } v_2)$ 或 $(u_2 = v_2 \text{ 和 } u_1 \text{ adj } v_1)$ 时就把 u 和 v 连接起来所得到的图 G 称为 G_1 和 G_2 的积图, 记为 $G = G_1 \times G_2$. 其中 $u_i \text{ adj } v_i$ 表示 u_i 和 v_i 邻接.



定义 设 $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, 对点集 $V = V_1 \times V_2$ 中的任意两个点 $u = (u_1, u_2)$ 和 $v = (v_1, v_2)$, 当 $(u_1 \text{ adj } v_1)$ 或 $(u_1 = v_1 \text{ 和 } u_2 \text{ adj } v_2)$ 时就把 u 和 v 连接起来所得到的图 G 称为 G_1 和 G_2 的合成图, 记为 $G = G_1 | G_2$.

例 已知 G_1 与 G_2 , 求 $G_1 | G_2$ 和 $G_2 | G_1$.



若 G_1 的点数和边数为 n_1, m_1 , G_2 的点数和边数为 n_2, m_2 , 经过联、积、合成三种运算, 图的点数和边数为 (考过填空题, 不止一次, 考联图、积图的点数和边数是多少)

超立方体 Q_n 是具有 2^n 个顶点, $n2^{n-1}$ 条边的 n 正则二部图.

运算	点数	边数
$G_1 \vee G_2$	$n_1 + n_2$	$m_1 + m_2 + n_1 n_2$
$G_1 \times G_2$	$n_1 n_2$	$n_1 m_2 + n_2 m_1$
$G_1 [G_2]$	$n_1 n_2$	$n_1 m_2 + n_2^2 m_1$
$G_2 [G_1]$	$n_1 n_2$	$n_2 m_1 + n_1^2 m_2$

1.3 路和连通性

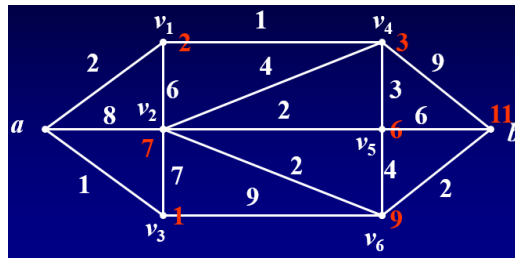
Theorem 7. 设图 G 为 n 阶图, 若 G 中任意两个不相邻顶点 u 与 v 满足 $d(u) + d(v) \geq n - 1$, 则 G 是连通图.

Theorem 8 (偶图判定定理). 一个图是偶图当且当它不包含奇圈.

1.4 最短路及其算法 (填空题)

Example 2. 如图所示, 求点 a 到点 b 的最短距离. (以前考过大题, 2005 年)

Solution. 红色表示依次选取的标号



1. $A_1 = \{a\}$, $t(a) = 0$, $T_1 = \emptyset$
2. $b_1^{(1)} = v_3$
3. $m_1 = 1$, $a_2 = v_3$, $t(v_3) = t(a) + l(av_3) = 1$ (最小), $T_2 = \{av_3\}$
4. $m_2 = 1$, $a_3 = v_1$, $t(v_1) = t(a) + l(av_1) = 2$ (最小), $T_3 = \{av_3, av_1\}$
5. $A_3 = \{a, v_3, v_1\}$, $b_1^{(3)} = v_2, b_2^{(3)} = v_2, b_3^{(3)} = v_4$
6. $m_3 = 3, a_4 = v_4, t(v_4) = t(v_1) + l(v_1v_4) = 3$ (最小), $T_4 = \{av_3, av_1, v_1v_4\}$
7. $A_4 = \{a, v_3, v_1, v_4\}$, $b_1^{(4)} = v_2, b_2^{(4)} = v_2, b_3^{(4)} = v_2, b_4^{(4)} = v_5$
8. $m_4 = 4, a_5 = v_5, t(v_5) = t(v_4) + l(v_4v_5) = 6$ (最小), $T_5 = \{av_3, av_1, v_1v_4, v_4v_5\}$
9. $A_5 = \{a, v_3, v_1, v_4, v_5\}$, $b_1(5) = v_2, b_2(5) = v_2, b_3(5) = v_2, b_4(5) = v_2, b_5(5) = v_2$
10. $m_5 = 4, a_6 = v_2, t(v_2) = t(v_4) + l(v_4v_2) = 7$ (最小), $T_6 = \{av_3, av_1, v_1v_4, v_4v_5, v_4v_2\}$
11. $A_6 = \{a, v_3, v_1, v_4, v_5, v_2\}$, $b_2^{(6)} = v_6, b_4^{(6)} = b, b_5^{(6)} = v_6, b_6^{(6)} = v_6$
12. $m_6 = 6, a_7 = v_6, t(v_6) = t(v_2) + l(v_2v_6) = 9$ (最小), $T_7 = \{av_3, av_1, v_1v_4, v_4v_5, v_4v_2, v_2v_6\}$

$$13. A_7 = \{a, v_3, v_1, v_4, v_5, v_2, v_6\}, b_4(7) = b, b_5^{(7)} = b, b_7^{(7)} = b$$

$$14. m_7 = 7, a_8 = b, t(b) = t(v_6) + l(v_6b) = 11(\text{最小}), T_8 = \{av_3, av_1, v_1v_4, v_4v_5, v_4v_2, v_2v_6, v_6b\}$$

于是知 a 与 b 的距离 $d(a, b) = t(b) = 11$, 最短路为 $a \rightarrow v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_2 \rightarrow v_6 \rightarrow b$.

1.5 图的代数表示及特征

Definition 5 (邻接矩阵). G 的邻接矩阵是一个 $n \times n$ 矩阵 $A(G) = [a_{ij}]$, 其中若 v_i 邻接 v_j , 则 $a_{ij} = 1$; 否则 $a_{ij} = 0$.

注: 若 a_{ij} 取为连接 v_i 与 v_j 的边的数目, 则称 A 为推广的邻接矩阵.

Theorem 9 (以前考过填空题). 令 G 是一个有推广邻接矩阵 A 的 p 阶标定向图, 则 A^n 的 i 行 j 列元素 $a_{ij}^{(n)}$ 等于由 v_i 到 v_j 的长度为 n 的通道的数目.

推论: A^2 的元素 $a_{ii}^{(2)}$ 是 v_i 的度数, A^3 的元素 $a_{ii}^{(3)}$ 是含 v_i 的三角形的数目的两倍.

Definition 6 (关联矩阵). 关联矩阵 $B(G) = [b_{ij}]$ 是一个 $n \times m$ 矩阵, 当点 v_i 与边 e_j 关联时 $b_{ij} = 1$, 否则 $b_{ij} = 0$.

Example 3. v_i 到 v_j 长度为 k 的通道的数目是 $a_{ij}^{(k)}$.

Example 4. 给你一个 A^2 , 长度为 2 的途径有 $\sum_{i,j} a_{ij}^{(2)}$.

Example 5. 给你一个 A^2 , 问 A 有多少条边, 结果: 主对角线元素之和除以 2.

设简单图 G 的邻接矩阵为 A , 且

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

则图 G 的边数为 6 (主对角线元素除以 2)

矩阵 A 的所有特征值的平方和等于该图边数的 2 倍.

$$\text{Spec}(K_n) = \begin{pmatrix} -1 & n-1 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

完全图 K_n 的特征值有 $-1(n-1$ 重) 和 $n-1(1$ 重), 所以 K_n 的最大特征值为 $n-1$ (考过填空题).

1.6 极图

完全 l 部图 K_{n_1, n_2, \dots, n_l} 的点数: $\sum_{i=1}^l n_i$, 边数 $\sum_{1 \leq i < j \leq l} n_i n_j$ (考过填空题).
 n 阶完全 l 几乎等部图记为: $T_{l, n}$

Theorem 10. n 阶完全偶图 K_{n_1, n_2} 的边数 $m = n_1 n_2$, 且 $m \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$.

证明. $m = n_1 n_2$ 显然. 下面证明第二结论:

$$m(K_{n_1, n_2}) = m(K_{n-n_2, n_2}) = (n - n_2) n_2 = \frac{n^2}{4} - \left(\frac{n}{2} - n_2\right)^2 \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

□

注: 具有 m 条边的 n 阶简单偶图, 则 $m \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$.

Theorem 11. n 阶 l 部图 G 有最多边数的充要条件是 $G \cong T_{l, n}$.

Theorem 12 (Turan 定理). 若 G 是 n 阶简单图, 并且不包含 K_{l+1} , 则边数

$$m(G) \leq m(T_{l, n})$$

此外, 仅当 $G \cong T_{l, n}$, $m(G) = m(T_{l, n})$

Example 6. n 阶简单图 G , $K_3 \not\subseteq G$, 则 G 最多有 $n^2/4$ 条边.

Example 7. 9 阶简单图 G , $K_4 \not\subseteq G$, 则 G 最多有 27 条边.

Theorem 13. $K_{l+1} \not\subseteq G$, 则 $m(T_{l, n}) = C_l^2 \left(\frac{n}{l}\right)^2$.

2 树

2.1 树的概念与性质

Definition 7. 不含圈的图称为无圈图, 连通的无圈图称为树.

非同构的 4 阶、5 阶、6 阶树的个数分别为 2、3、6.

由 k 颗树组成的森林满足 $m = n - k$, 其中 n 为 G 的顶点数, m 为 G 的边数.

Theorem 14 (以前考过证明). 每棵非平凡树至少有两片树叶.

证明. 设 $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ 是树 T 的度序列, 因为 T 是连通的, 所以树 T 的最小度 $\delta(T) = d_1 \geq 1$. 如果树 T 中至多有一片树叶, 那么

$$2n - 2 = 2m(T) = \sum_{i=1}^n d_i \geq 1 + 2(n - 1),$$

出现矛盾.

□

Example 8. G 是树且 $\Delta \geq k$, 则 G 至少有 k 片叶子.

Solution. 若不然, 设 G 有 n 个顶点, m 条边且至多 $k-1$ 片叶子. 由于 $\Delta \geq k$, 于是由握手定理得

$$2m = \sum d(v) \geq 1 \cdot (k-1) + 2 \cdot (n-k) + k \cdot 1 = 2n - 1 > 2n - 2$$

所以, $m > n - 1$, 与 G 是树矛盾!

Theorem 15. 设 G 是具有 n 个点 m 条边的图, 则下列命题等价:

1. G 是树.
2. G 无环且任意两个不同点之间存在唯一的路.
3. G 连通, 删去任一边便不连通.
4. G 连通, 且 $n = m + 1$.
5. G 无圈, 且 $n = m + 1$.
6. G 无圈, 添加任何一条边可得唯一的圈.

Example 9. 设 T 为具有 12 条边的树, 其顶点度的取值为 1, 2, 5. 如果 T 恰有 3 个度为 2 的顶点, 那么 T 有多少片树叶?

Solution. 设 T 有 x 片树叶. 根据树的点数与边数的关系知, 由握手定理

$$1 \times x + 2 \times 3 + 5 \times (13 - 3 - x) = 2 \times 12$$

得 $x = 8$, 即 T 有 8 片树叶.

Example 10. 设树 T 中度数为 i 的顶点的个数为 $n_i (1 \leq i \leq k)$, 则 $\sum_1^k i n_i = 2(\sum_1^k n_i - 1)$.

$$n_1 = 2 + n_3 + 2n_4 + \cdots + (k-2)n_k.$$

2.2 树的中心和形心 (考过填空写中心点)

离 v 最远的点的距离称为顶点 v 的离心率, 最小的离心率称为半径, 等于半径的点称为中心点.

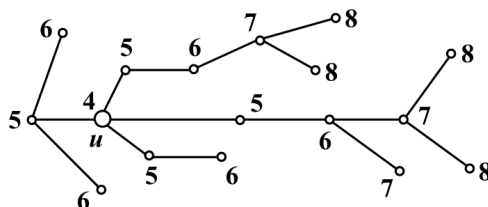


图 1: 半径是 4, 中心点是 u

树 T 在点 u 处的一个分枝是指包含 u 作为一个叶子点的极大子树, 树 T 在点 u 的分枝中边的最大数目称为点 u 的权, 树 T 中权值最小的点称为它的一个形心点.

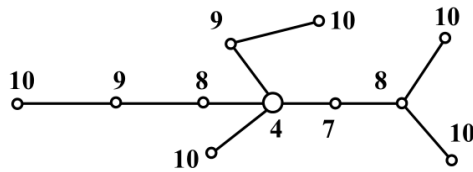


图 2: 权值为 4 的顶点为该树的形心.

2.3 生成树

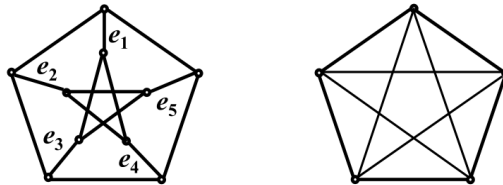


图 3: 收缩边 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 .

Theorem 16 (Cayley 定理, 考过证明). 若 e 是图 G 的边, 则

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$$

证明. 由于 G 的每一颗不包含 e 的生成树也是 $G - e$ 的生成树, 所以 $\tau(G - e)$ 就是 G 的不包含 e 的生成树的个数, $\tau(G \cdot e)$ 就是 G 的包含 e 的生成树的个数. \square

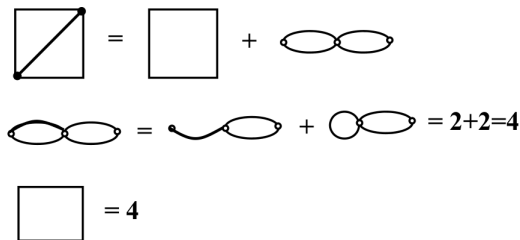


图 4: $\tau(G) = 4 + 4 = 8$.

Theorem 17 (考过填空题).

$$\tau(K_n) = n^{n-2}, \tau(K_{m,n}) = n^{m-1}m^{n-1}. K_5 = 125, K_{3,3} = 81.$$

2.4 最小生成树 (填空题)

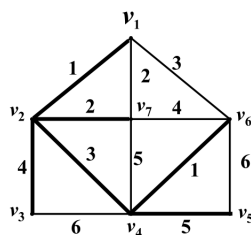


图 5: $W(T) = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 16$.

3 图的连通度

3.1 割边 (K_2)、割点 (自环, K_2 , 八字形) 和块 (阶数 ≥ 3)

若 G 连通, 则割边是指删去后使 G 不连通的边.

Theorem 18. e 是图 G 的割边当且仅当 e 不在 G 的任何圈中.

Example 11 (考过证明题). 1. 若 G 的每个顶点的度数均为偶数, 则 G 没有割边;

2. 若 G 为 k 正则二部图 ($k \geq 2$), 则 G 无割边.

Solution. 1. 若不然, 设 $e = uv$ 为 G 的割边.

则 $G - e$ 的含有顶点 u (或 v) 的那个分支中点 u (或 v) 的度数必为奇数, 而其余点的度数为偶数, 与“度数为奇数的顶点的个数为偶数”相矛盾.

2. 若不然, 设 $e = uv$ 为 G 的割边.

假设 G_1 为 $G - e$ 的包含顶点 u 的连通分支, 显然 G_1 中除了点 u 的度数为 $k - 1$ 外, 其余点的度数均为 k .

显然 G_1 仍为偶图, 设其二部划分为 S 和 T 且 $|S| = s$, $|T| = t$.

不妨假设 S 包含顶点 u , 则

$$ks - 1 = |E(G_1)| = kt$$

但是因 $k \geq 2$, 所以等式不能成立! 因此, e 一定不是割边.

若无环图 G 连通, 则割点是指删去该点使 G 不连通的点.

注: 割点有两类, 一类是自环, 一类是破坏连通性的点.

Example 12. 求证: 无环非平凡连通图至少有两个点不是割点.

证明. 由于 G 是无环非平凡连通图, 所以存在非平凡生成树. 非平凡生成树至少两片树叶, 它们不能为生成树的割点. 显然, 它们也不能为 G 的割点. \square

注: 非平凡树一定有割边, 不一定有割点 (K_2).

Theorem 19. 1. 没有割点 \Leftrightarrow 没有割边 (K_2);

2. 有割边 \Leftrightarrow 有割点 (八字形的图);

3. 阶数 ≥ 3 的无环连通图, 有割边 \Rightarrow 有割点.

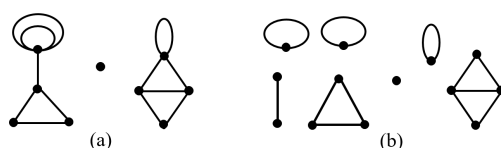
4. 阶数 ≥ 3 的无环连通图, 有割点 \Leftrightarrow 有割边.

3.2 块及其性质

没有割点的连通图称为块图，简称块。

1. 仅有一条边的块，要么是割边，要么是环；
2. 仅有一个点的块，要么是孤立点，要么是环；
3. 至少有两个点的块无环；
4. 至少有三个点的块无割边，无自环。

Example 13. 图 G 如图 (a) 所示， G 的所有块如图 (b) 所示。



Theorem 20. 设图 G 的阶至少为 3，则 G 是块当且仅当 G 无环并且任意两点都位于同一个圈上。

Theorem 21. 设图 G 的阶至少为 3，则 G 是块当且仅当 G 无孤立点且任意两边都位于同一个圈上。

Theorem 22. 点 v 是图 G 的割点当且仅当 v 至少属于 G 的两个不同的块。

注：两个不同块的公共顶点只能是割点，即块与块只能由割点相联结，因此可以通过割点搜寻块。

注：($k \geq 3$) 块没有割边，块有圈。

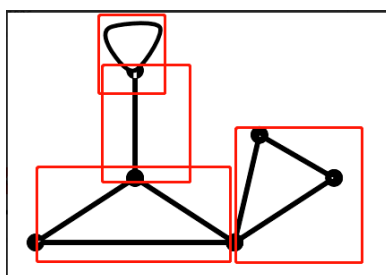


图 6: 它的块的数目是 4.

3.3 连通度

点连通度可描述为“使图不连通或成为平凡图，最少需要删去的点数”。

$$(1)\kappa(K_n) = n - 1, (2)\kappa(C_n) = 2 \text{ 其中 } C_n \text{ 为 } n \text{ 圈}, n \geq 3.$$

Theorem 23. 若一个图的连通度至少为 k ，则称该图是 k 连通的。

注: k 连通: 要想破坏连通性, 至少要删去 k 个点.

注: K_2 连通、无割点, 但连通度为 1.

边连通度可描述为“使图不连通或成为平凡图, 最少需要删去的边数”.

$$(1)\lambda(K_n) = n - 1, (2)\lambda(C_n) = 2 \text{ 其中 } C_n \text{ 为 } n \text{ 圈}, n \geq 2.$$

Theorem 24. 若一个图的边连通度至少为 k , 则称该图是 k 边连通的.

注: k 边连通: 要想破坏连通性, 至少要删去 k 条边.

注: k 连通一定是 k 边连通的.

Theorem 25. 对任意的图 G , 有

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

Theorem 26. 设 G 是具有 m 条边的 n 阶连通图, 则

$$\kappa(G) \leq \lfloor 2m/n \rfloor.$$

Example 14. n 阶 k 连通图至少 $\lceil kn/2 \rceil$ 有条边.

图 G 的顶点数为 n 且 7 连通, 则其边数至少为 $\lceil 7n/2 \rceil$.

Lemma 1. 设 G 是 n 阶简单图, 若 $\delta(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$, 则 G 必连通, 且 $\lambda(G) = \delta(G)$.

证明. 若 G 不连通, 则 G 至少有两个连通分支, 从而必有一个分支 H 满足 $|V(H)| \leq \lfloor n/2 \rfloor$.

因 G 是简单图, 从而

$$\Delta(H) \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1 < \lfloor n/2 \rfloor$$

于是

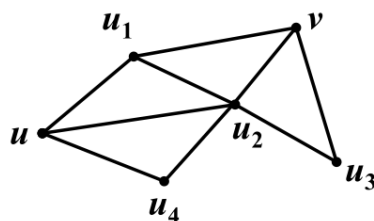
$$\delta(G) \leq \delta(H) \leq \Delta(H) < \lfloor n/2 \rfloor$$

这与已知矛盾, 所以 G 必连通. □

Menger 定理是图的连通性问题的核心定理之一, 它揭示了图的连通度与不同顶点对间的不相交路的数目之间的关系.

Theorem 27. 1. 设 x 和 y 是图 G 中的两个不相邻点, 则 G 中分离 x 和 y 的最少点数等于独立的 (x, y) 路的最大数目.

2. 设 x 和 y 是图 G 中的两个不同点, 则 G 中分离 x 和 y 的最少边数等于边不重的 (x, y) 路的最大数目.



在该图中, 独立的 (u, v) 路的最大条数是 2, 分离点 u 与 v 的最小点集是 $\{u_1, u_2\}$, 包含 2 个顶点.

在该图中, 边不重的 (u, v) 路的最大条数是 3, 分离点 u 与 v 的最小边集是 u_1v, u_2v, u_2u_3 , 包含 3 条边.

Theorem 28 (Menger 定理). 1. 一个非平凡图 G 是 $k(k \geq 2)$ 连通的当且仅当 G 的任意两个不同顶点间至少存在 k 条独立的路;

2. 一个非平凡图 G 是 $k(k \geq 2)$ 边连通的当且仅当 G 的任意两个不同顶点间至少存在 k 条边不重的路.

注: 由“任意两个不相邻的顶点之间存在 k 条独立的路”必能推出“任意两个相邻的顶点之间也存在 k 条独立的路”.

3.4 图的宽距离和宽直径 (不做要求)

4 Euler 图与 Hamilton 图

4.1 欧拉图

Definition 8. 经过 G 的每条边的 (闭) 迹被称为 *Euler* (闭) 迹, 存在 *Euler* 闭迹的图称为 *Euler* 图, 简称 *E* 图. *Euler* 闭迹又称为 *Euler* 回路.

Theorem 29. 假定 G 是一个连通图, 则下列命题等价:

1. G 是欧拉图.
2. G 的每个点的度是偶数.
3. G 的边集能划分为边不重的圈的并.

Lemma 2. 连通图 G 有 *Euler* 迹当且仅当 G 最多有两个奇点.

注:

1. 图 G 有欧拉迹当且仅当 G 能“一笔画”.
2. 若奇度点数为零, 则一笔画与起点无关; 若奇度点数为 2, 则一笔画的起点与终点均为奇点.

Theorem 30. 下列陈述对于一个连通有向图 D 是等价的:

1. D 是欧拉有向图;
2. D 的每个点的入度等于出度;
3. D 的弧集可划分为边不重的有向圈的并.

Euler 图没有割边, 有可能有割点 (八字形的图).

Example 15 (以前考过). $K_{m,n}$ (m, n 均为偶数), 则欧拉环游中至少包含 mn 条边.

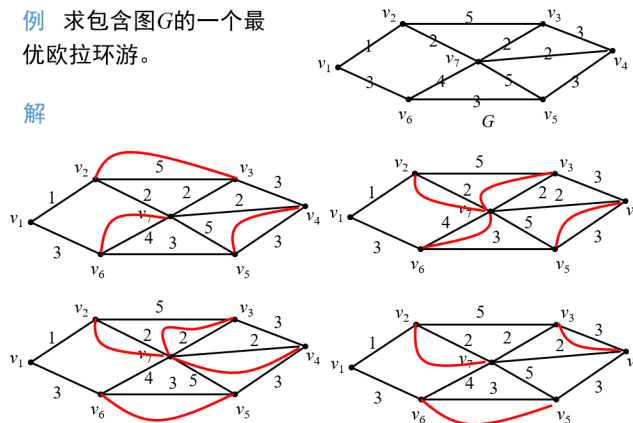
非 Euler 图求最优环游的方法

- (1) 用每条边最多添一次的方法任意添一些重复边使图 G 成为一个欧拉多重图 G' .
- (2) 考查 G' 的圈, 若存在圈 C , 其中重复边的总权值大于该圈权值的一半, 则在圈 C 上交换重复边和不重复边得到一个新的欧拉多重图. 重复这个过程, 直到得到一个图 G^* , 使得图 G^* 中每个圈上重复边的总权值不大于该圈权值的一半.
- (3) 用 Fleury 算法求 G^* 的 Euler 回路.

Example 16. 6 个奇度顶点, 添加 3 条边.

例 求包含图 G 的一个最优欧拉环游.

解



Example 17. 设图 G 是具有 k 个奇度顶点, 则在 G 中最少添加 $k/2$ 条边才能使 G 具有欧拉回路.

Example 18. 如果一个赋权图 G 中只有两个奇度顶点 u 与 v , 设计一个求其最优欧拉环游的算法.

Solution. 1. 在 u 与 v 间求出一条最短路 P ; (最短路算法)

2. 在最短路 P 上, 给每条边添加一条平行边得到 G 的欧拉多重图 G^* ;

3. 在欧拉多重图 G^* 中用 Fleury 算法求出一条欧拉回路.

Example 19. 下图中的最短欧拉环游的权值是 37.

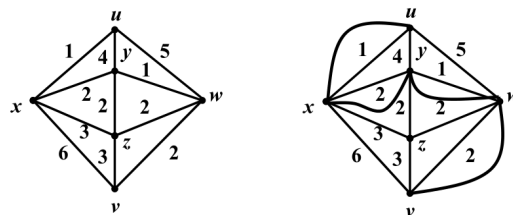


图 7: 最优欧拉环游: $xuyvwzwyxuwvxyzx$.

4.2 哈密尔顿图

Definition 9. 经过图中每个点仅一次的路或圈称为 *Hamilton* 路或 *Hamilton* 圈, 存在 *Hamilton* 圈的图称为 *Hamilton* 图, 简称 *H* 图. *Hamilton* 路或圈也简称 *H* 路或 *H* 圈.

4.2.1 H 图的判断方法: 一必要, 四充分, 一充要

Theorem 31 (必要条件). 若 G 是 H 图, 则对于 V 的每个非空真子集 S , 均有

$$\omega(G - S) \leq |S|$$

注: 上述定理只是必要条件, 而非充分条件.

彼得森图不是 H 图.

Theorem 32 (Dirac, 充分条件). 对于 $n \geq 3$ 的简单图 G , 如果 G 中有:

$$\delta(G) \geq \frac{n}{2}$$

那么 G 是 H 图.

注: 上述定理只是充分条件, 而非必要条件, 例如长度为 5 的圈.

Theorem 33 (Ore, 充分条件). 对于 $n \geq 3$ 的简单图 G , 如果 G 中的任意两个不相邻顶点 u 与 v , 有:

$$d(u) + d(v) \geq n$$

那么 G 是 H 图.

注: 上述定理只是充分条件, 而非必要条件, 例如长度为 5 的圈.

Definition 10. 在 n 阶简单图 G 中, 若对不相邻的任何一对点 u 和 v 都有 $d(u) + d(v) < n$, 则称 G 是闭图. G 的闭包是包含 G 的极小闭图.

Lemma 3. 若 G_1 和 G_2 是同一个点集 V 的两个闭图, 则 $G = G_1 \cap G_2$ 是闭图.

Lemma 4. 任意图 G 的闭包是唯一的.

证明. 设 \hat{G}_1 和 \hat{G}_2 是 G 的闭包, 则显然有 $G \subset \hat{G}_1, G \subset \hat{G}_2$.

因此, $G \subset \hat{G}_1 \cap \hat{G}_2$, 又因为 $\hat{G}_1 \cap \hat{G}_2$ 是闭图, 且

$$\hat{G}_1 \cap \hat{G}_2 \subset \hat{G}_1, \hat{G}_1 \cap \hat{G}_2 \subset \hat{G}_2$$

故由闭包的定义知

$$\hat{G}_1 = \hat{G}_1 \cap \hat{G}_2 = \hat{G}_2$$

因此 G 的闭包是唯一的. □

注: 一个图的闭包不一定是完全图.

Theorem 34 (Bondy, 充要条件). 一个简单图 G 是 H 图当且仅当它的闭包是 H 图.

Theorem 35 (充分条件). 设 G 是 $n \geq 3$ 的简单图, 若 G 的闭包是完全图, 则 G 是 H 图.

注: 上述定理反之不成立, 即 H 图的闭包不一定是完全图, 例如长度为 5 的圈, 它的闭包就是它本身.

Theorem 36 (度序列判定法). 设简单图 G 的度序列是 (d_1, d_2, \dots, d_n) , 这里, $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, 并且 $n \geq 3$. 若对任意的 $m < n/2$, 或有 $d_m > m$, 或有 $d_{n-m} \geq n - m$, 则 G 是 H 图.

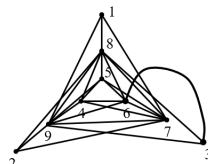
Example 20 (以前考过). 求证该图为哈密尔顿图用度序列判定方法.

例 求证图 G 是 H 图.

证明 在 G 中有

$$d_1 = d_2 = d_3 = 3 \quad d_4 = d_5 = 5$$

$$d_6 = 6 \quad d_7 = 7 \quad d_8 = d_9 = 8$$

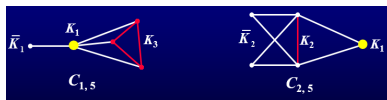


4.3 度极大的非 Hamilton 图

Definition 11. 图 G 称为度极大非 H 图, 若它的度不弱于其它非 H 图.

Definition 12. 对于 $1 \leq m < n/2$, $C_{m,n}$ 图定义为:

$$C_{m,n} = K_m \vee (\overline{K}_m + K_{n-2m}).$$



Theorem 37. 对于 $1 \leq m < n/2$ 的 $C_{m,n}$ 图不是 H 图.

Example 21. 具有 5 个点的度极大非哈密尔顿图族为 $C_{1,5}$ 和 $C_{2,5}$.

4.4 度极大非 H 图的特征

Theorem 38 (Chvatal, 充分条件, 考过证明). 若 G 是 $n \geq 3$ 的非 H 简单图, 则 G 度弱于某个 $C_{m,n}$ 图.

证明. 设 G 是度序列为 (d_1, d_2, \dots, d_n) 的非 H 简单图, 且

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$$

由度序列判定法: 存在 $m < n/2$, 使得 $d_m \leq m$, 且 $d_{n-m} < n - m$.

于是, G 的度序列必弱于如下序列:

$$\underbrace{(m, m, \dots, m)}_m, \underbrace{(n-m-1, n-m-1, \dots, n-m-1)}_{n-2m}, \underbrace{(n-1, n-1, \dots, n-1)}_m$$

而上面序列正好是图 $C_{m,n}$ 的度序列.

□

1. 定理刻画了非 H 简单图的特征: $C_{m,n}$ 图族中每个图都是某个 n 阶非 H 简单图的极图.
2. 如果 n 阶简单图 G 度优于所有的 $C_{m,n}$ 图族, 则 G 一定是 H 图.
3. 定理的条件是必要条件而非充分条件.

Example 22. 5 阶圈 C_5 的度序列是 $(2, 2, 2, 2, 2)$, 它度弱于 $C_{2,5}$ 的度序列 $(2, 2, 2, 4, 4)$, 但 C_5 是 H 图.

Theorem 39 (充分条件). 设 G 是 n 阶简单图. 若 $n \geq 3$ 且

$$|E(G)| > \binom{n-1}{2} + 1$$

则 G 是 H 图; 并且, 具有 n 个顶点 $\binom{n-1}{2} + 1$ 条边的非 H 图只有 $C_{1,n}$ 以及 $C_{2,5}$.

证明. (1) 若不然, 由 Chvátal 定理知, G 度弱于某个 $C_{m,n}$, 于是有

$$\begin{aligned} |E(G)| &\leq |E(C_{m,n})| = \frac{1}{2}[m^2 + (n-2m)(n-m-1) + m(n-1)] \\ &= \binom{n-1}{2} + 1 - \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - (m-1)(n-2m-1) \\ &\leq \binom{n-1}{2} + 1 \end{aligned}$$

这与条件矛盾! 所以 G 是 H 图.

(2) 对于 $C_{1,n}$ 有:

$$|E(G)| = |E(C_{1,n})| = \binom{n-1}{2} + 1.$$

除此之外, 只有当 $m=2$ 且 $n=5$ 时有:

$$|E(G)| = |E(C_{m,n})| = \binom{n-1}{2} + 1.$$

□

注: 推论的条件是充分而非必要的. 例如长度为 5 的圈 C_5 .

n 阶完全图中 H 圈的个数为 $(n-1)!$.

4.5 边交换技术 (后面有例题, 以前考过)

可以通过如下方法求出最优圈的一个下界:

1. 在 G 中任意删掉一点 v 得图 G_1 ;
2. 在图 G_1 中求出一棵最小生成树 T ;
3. 在 v 的关联边中选出两条权值最小者 e_1 与 e_2 ; 若 H 是 G 的最优圈, 则

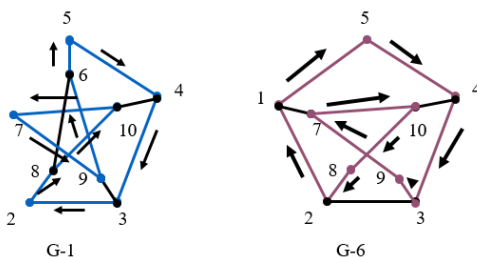
$$W(H) \geq W(T) + W(e_1) + W(e_2).$$

4.6 超哈密尔顿图

Definition 13. 若图 G 不是哈密尔顿图，但对于任意点 v ， $G - v$ 都是哈密尔顿图，则称 G 是超哈密尔顿图。

Example 23. 证明彼得森图是超哈密尔顿图。

证明. 由对称性，只需考虑下面两种情形: (a)、 $G-1$ 、(b)、 $G-6$ 。



(a) $G-1$ 中有 H 圈: 54328(10)7965

(b) $G-6$ 中有 H 圈: 54397(10)8215

由 (a) 与 (b)， G 是超 H 图。 □

5 匹配与因子分解

5.1 匹配

Definition 14. 设 M 是图 G 的边子集，若任意的 $e \in M$ ， e 都不是环，且属于 M 的边互不相邻，则称 M 为 G 的一个匹配。设 M 为 G 的一个匹配，对 $v \in V(G)$ ，若 v 是 M 中某边的一个端点，则称 v 为 M 饱和点，否则称为 M 非饱和点。

Definition 15. 如果 G 的每个顶点均为 M 饱和点，则称 M 为 G 的完美匹配。

Definition 16. 如果 M 是图 G 的包含边数最多的匹配，则称 M 为 G 的最大匹配。

Remark 1. 1. 完美匹配必是最大匹配，而最大匹配不一定是完美匹配；

2. 最大匹配必存在，但完美匹配不一定存在；

3. 图 G 存在完美匹配的一个必要条件是 G 的点数必然为偶数。

Theorem 40 (Berge). 图 G 的匹配 M 是最大匹配当且仅当 G 不含 M 可扩路。

5.2 偶图的匹配与覆盖

Definition 17. 取图 G 的一个顶点子集 S ，令

$$N(S) = \{v \mid \text{存在 } u \in S \text{ 使得 } u \text{ 与 } v \text{ 相邻}\}$$

称 $N(S)$ 为 S 的邻集。

Theorem 41 (Hall, 偶图匹配存在性判定定理). 设 G 为具有二分类 (X, Y) 的偶图, 则 G 包含饱和 X 的每个顶点的匹配当且仅当

$$|N(S)| \geq |S|$$

对所有 $S \subseteq X$ 成立.

Remark 2. 若 G 是 k 正则偶图 ($k > 0$), 则 G 有完美匹配.

证明. G 是具有二分类 (X, Y) 的 k 正则偶图, 由于 G 是 k 正则的, 所以 $k|X| = |E(G)| = k|Y|$, 所以 $|X| = |Y|$.

任取 X 的一个子集 S , 令

$$E_1 = \{e | e \in E \text{ 并且 } e \text{ 与 } S \text{ 中的顶点关联}\},$$

$$E_2 = \{e | e \in E \text{ 并且 } e \text{ 与 } N(S) \text{ 中的顶点关联}\}.$$

因与 S 中的顶点关联的边必与 $N(S)$ 中的顶点关联, 所以我们可以推出 $E_1 \subseteq E_2$.

因此, $k|N(S)| = |E_2| \geq |E_1| = k|S|$, 由此可知 $|N(S)| \geq |S|$.

根据 Hall 定理, 可知 G 有一个饱和 X 的每个顶点的匹配 M , 由于 $|X| = |Y|$, 所以 M 是完美匹配. \square

Example 24. 1. 每个 n 方体都有完美匹配.

2. K_{2n} 和 $K_{n,n}$ 中不同的完美匹配的个数分别是 $(2n-1)!!$, $n!$.

3. 非平凡树至多存在一个完美匹配 (后面有证明, 以前考过).

5.3 点覆盖与 konig 定理

Definition 18. 图 G 的一个覆盖是指 $V(G)$ 的一个子集 K , 使得 G 的每条边都至少有一个端点在 K 中.

Theorem 42. 设 M 是匹配, K 是覆盖, 若 $|M| = |K|$, 则 M 是最大匹配, 且 K 是最小(点)覆盖. ($|M| \leq |M^*| \leq \tilde{K} \leq |K|$, 由于 $|M| = |K|$, 所以结论得证.)

Theorem 43 (konig). 在偶图中, 最大匹配中的边数等于最小覆盖中的点数.

Example 25. $k_{m,n}$ ($m < n$) 最小覆盖中 m 个点 (因为最大匹配有 m 条边).

5.4 Tutte 定理与完美匹配

Theorem 44 (Tutte). 偶数阶图 G 有完美匹配当且仅当

$$o(G-S) \leq |S|$$

对所有 $S \subset V$ 成立, 其中 $o(G-S)$ 表示 $G-S$ 中奇分支的个数.

Remark 3. 每个没有割边的 3 正则图都有完美匹配.

注: 有割边的 3 正则图不一定就没有完美匹配 (有可能有, 有可能没有).

彼得森图有完美匹配, 3 正则哈密尔顿图存在完美匹配.

5.5 因子分解

Definition 19. G 的一个因子分解是指将 G 分解为若干个边不重的因子之并.

Definition 20. k -因子指 k 正则的因子.

Example 26. 1. 1-因子的边集构成一个完美匹配.

2. 2-因子的连通分支为一个圈.

Definition 21. k -因子分解: 每个因子均为 k -因子的因子分解, 此时称 G 本身是 k -可因子化的.

研究图的因子分解主要有三个方面: 一是有没有, 二是能不能进行分解 (因子分解的存在性), 三是如何分解 (分解算法).

5.6 1-因子分解

若 G 有一个 1-因子 (其边集为完美匹配), 则显然 G 的阶数是偶数. 所以, 奇数阶图不能有 1-因子.

Theorem 45. 完全图 K_{2n} 是 1-可因子化的.

Theorem 46. k 正则偶图 ($k > 0$) 是 1-可因子化的.

Theorem 47. 具有 *Hamilton* 圈的 3 正则图是 1-可因子化的.

Remark 4. 1. 1-可因子分解的 3 正则图不一定有 *Hamilton* 圈.

2. 若 3 正则图有割边 (有可能存在 1-因子), 则不可 1-因子分解.

3. 无割边的 3 正则图可能也没有 1-因子分解 ($K_{3,3}$ 可 1-因子分解, 彼得森图不可 1-因子分解).

K_{2n} 的不同的 1-因子数目有 $(2n - 1)!!$, K_4 有唯一的 1-因子分解.

5.7 2-因子分解 (偶度正则图)

2-可因子化的图的所有点的度一定是偶数, 所以完全图 K_{2n} 不是 2-可因子化的 (K_{2n} 有 2-因子).

Theorem 48. 图 K_{2n+1} 是 n 个 H 圈的并.

Theorem 49. 完全图 K_{2n} 是一个 1-因子和 $n - 1$ 个 H 圈的并.

Theorem 50. 每一个没有割边的 3 正则图是一个 1-因子和一个 2-因子的并.

Theorem 51. 一个连通图是 2-可因子化的当且仅当它是偶数度正则图.

Example 27. 证明: K_{6n-2} 可以 3-因子分解.

证明. K_{6n-2} 可以分解为 $6n-3$ 个 1-因子的并, 而每 3 个 1-因子可合成 1 个 3-因子, 故 K_{6n-2} 可以分解为 $2n-1$ 个 3-因子的并. \square

Example 28 (考过证明). 若 n 为偶数且 $\delta(G) \geq n/2 + 1$, 则 n 阶图 G 有 3-因子.

Solution. 因 $\delta(G) \geq n/2 + 1$, 由 Dirac 定理得: n 阶图 G 有 H 圈 C . 又因 n 为偶数, 所以 C 为偶圈.

于是由 C 可得到 G 的两个 1 因子, 设其中一个为 F_1 .

考虑 $G_1 = G - F_1$, 则 $\delta(G_1) \geq n/2$. 于是 G_1 中有 H 圈 C_1 .

作 $H = C_1 \cup F_1$. 显然 H 是 G 的一个 3-因子.

思考: 若 G 为 n 阶简单图 (n 为偶数) 且 $\delta(G) \geq n/2 + 3$, 则 G 中存在 5-因子.

5.8 最优匹配与匈牙利算法

匈牙利算法算法思想: 先任取一个匹配 M , 然后寻找 M 可扩路. 若不存在 M 可扩路, 则 M 为最大匹配; 若存在, 则将可扩路中 M 与非 M 的边互换, 得到一个比 M 多一条边的匹配 M' , 再对 M' 重复上面过程.

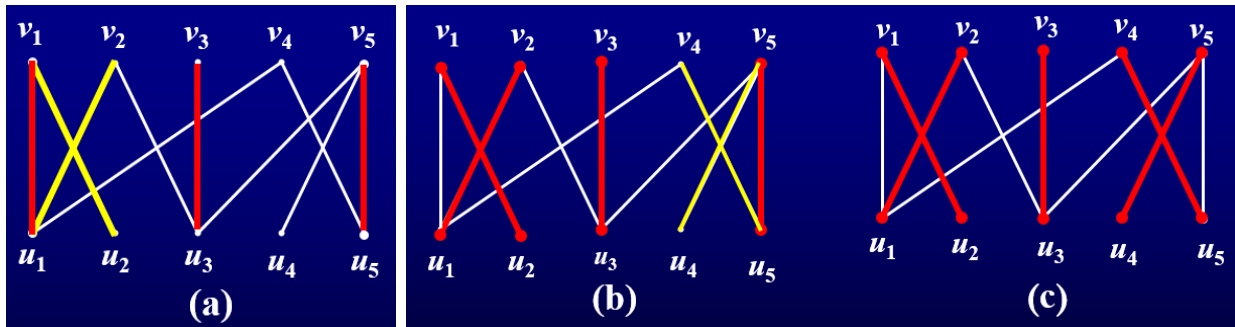


图 8: 求最大匹配的过程, 存在 $z \in X$, 有 $yz \in M$

具有最大权值的完美匹配, 称为最优匹配.

Definition 22. 设 $G = (X, Y)$, 若在顶点集上的实值函数 l 满足: 对任意的 $x \in X, y \in Y$, 均有:

$$l(x) + l(y) \geq w(xy)$$

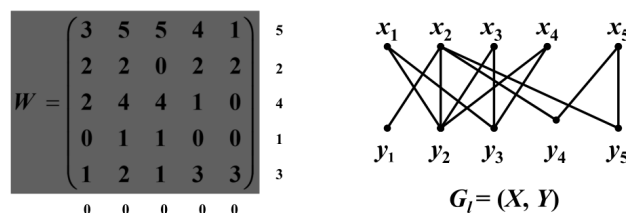
称 l 是赋权完全偶图 G 的可行顶点标号.

Definition 23. 设 l 是赋权完全偶图 $G = (X, Y)$ 的可行顶点标号, 令:

$$E_l = \{xy \in E(G) | l(x) + l(y) = w(xy)\}$$

称以 E_l 为边集的 G 的生成子图为 G 的对应于 l 的相等子图, 记为 G_l .

Example 29. 设如下矩阵是赋权完全偶图 G 的权值矩阵并注明了一种可行顶点标号 l .



Theorem 52 (以前考过证明). 设 l 是赋权完全偶图 $G = (X, Y)$ 的可行顶点标号, 若相等子图 G_l 有完美匹配 M^* , 则 M^* 是 G 的最优匹配.

证明. 设 M^* 是 G_l 的完美匹配, 则:

$$w(M^*) = \sum_{e \in M^*} w(e) = \sum_{v \in V(G)} l(v)$$

又设 M 是 G 的任一完美匹配, 则:

$$w(M) = \sum_{e \in M} w(e) \leq \sum_{v \in V(G)} l(v)$$

所以, $w(M^*) \geq w(M)$, 即 M^* 是 G 的最优匹配. □

6 平面图

6.1 平面图

Definition 24. 设 G 是一个平面图, G 将所嵌入的平面划分为若干个区域, 每个区域的内部连同边界称为 G 的面, 无界的区域称为外部面或无限面.

注: 每个平面图有且仅有一个外部面.

Definition 25. 设 f 是 G 的一个面, 构成 f 的边界的边数 (割边计算 2 次) 称为面 f 的次数, 记为 $\deg(f)$.

Theorem 53. 设 G 是具有 m 条边的平面图, 则

$$\sum_{f \in \Phi} \deg(f) = 2m$$

Theorem 54 (Euler 公式). 设 G 是具有 n 个点, m 条边, φ 个面的连通平面图, 则有

$$n - m + \varphi = 2.$$

Remark 5. 设 G 是具有 n 个点, m 条边, φ 个面, k 个连通分支的平面图, 则

$$n - m + \varphi = k + 1$$

6.2 平面图的判定

Remark 6 (判定方法). 1. (必要条件) 设 G 是具有 n 个点, m 条边, φ 个面的连通平面图, 如果对 G 的每个面 f , $\deg(f) \geq l \geq 3$, 则

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

2. 设 G 是具有 n 个点, m 条边的简单平面图且 $n \geq 3$, 则

$$m \leq 3n - 6$$

3. 若 G 是简单平面图, 则 $\delta \leq 5$.
4. 一个连通平面图 G 是 2 连通的当且仅当 G 的每个面的边界是圈.
5. 若一个平面图是 2 连通的, 则它的每条边恰在两个面的边界上.

- 第一个的证明

一方面,

$$2m = \sum_{f \in \varphi} \deg(f) \geq l\varphi \Rightarrow \varphi \leq \frac{2m}{l}$$

另一方面, 由欧拉公式得:

$$\varphi = 2 - n + m$$

整理得

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2).$$

- 第一个推论也可以叙述为: 设 G 是具有 n 个点, m 条边的连通图, 如果

$$m > \frac{l}{l-2}(n-2)$$

则 G 是非可平面图.

- 第三个的证明

证明. 设 $n \geq 3$, 若 $\delta \geq 6$, 则

$$6n \leq \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m \Rightarrow m > 3n - 6$$

这与 “ $m \leq 3n-6$ ” 矛盾. □

$K_{3,3}$ 是非可平面图, K_5 是非可平面图.

Theorem 55. 存在且只存在 5 种正多面体: 正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体.

6.3 特殊平面图及平面图的对偶图

Definition 26. 设 G 是简单可平面图, 如果 G 是 $K_i (1 \leq i \leq 4)$, 或者在 G 的任意两个不相邻的顶点间添加一条边后, 得到的图均不是可平面图, 则称 G 是极大可平面图. 极大可平面图的平面嵌入称为极大平面图.

Lemma 5. 设 G 是极大平面图, 则 G 必连通; 若 G 的阶数至少等于 3, 则 G 无割边.

Theorem 56. 设 G 是至少有 3 个顶点的平面图, 则 G 是极大平面图的充分必要条件为 G 中各面的次数均为 3 且为简单图 (三角形特征).

注: 该定理可以简单记为 “极大平面图的三角形特征”, 即每个面的边界是三角形.

Lemma 6. 设 G 是一个有 n 个点, m 条边, φ 个面的极大平面图, 且 $n \geq 3$, 则

1. $m = 3n - 6$;

2. $\varphi = 2n - 4$.

注: 推论表明对一个极大平面图 G , 当其点数 n 给定时, G 的边数和面数也就确定了, 从而 G 的结构框架也大体确定了.

Definition 27. 如果在不可平面图 G 中任意删去一条边所得的图为可平面图, 则称 G 为极小不可平面图. 例如 K_5 和 $K_{3,3}$.

6.3.1 极大外平面图及其性质

Definition 28. 若一个可平面图存在一个所有顶点均在同一个面的平面嵌入, 则称该图为外可平面图.

Definition 29. 设 G 是简单外可平面图, 若在 G 中任意不邻接顶点间添上一条边后, G 成为非外可平面图, 则称 G 是极大外可平面图. 极大外可平面图的外平面嵌入称为极大外平面图.

Theorem 57. • 设 G 是一个有 $n(n \geq 3)$ 个点, 且所有点均在外部面上的外平面图, 则 G 是极大外平面图当且仅当其外部面的边界是圈, 内部面是三角形.

- 设 G 是一个有 $n(n \geq 3)$ 个点, 且所有点均在外部面上的极大外平面图, 则 G 有 $n-2$ 个内部面.

Lemma 7. 设 G 是一个阶数为 $n(n \geq 4)$ 且所有点均在外部面上的极大外平面图, 则 G 中存在两个度数均为 2 且不相邻的点.

Example 30. 设 G 是一个具有 $n(n \geq 4)$ 个点, m 条边的简单连通外平面图. 若 G 不含三角形, 则 $m \leq (3n-4)/2$.

Solution. 假设 G 的所有顶点在外部面的边界上, 则由条件知: G 的外部面的次数至少为 n , 内部面的次数至少为 4(G 不含三角形).

设 G 有 φ 个面, 则

$$2m \geq 4(\varphi - 1) + n$$

由欧拉公式得,

$$\varphi = 2 - n + m$$

因此, 根据上述两式得

$$m \leq \frac{3n - 4}{2}.$$

Theorem 58. 每个至少有 7 个顶点的外可平面图的补图不是外可平面图, 且 7 是这个数目的最小者.

6.3.2 对偶图

Theorem 59. 平面图 G 的对偶图 G^* 也是平面图, 并且还有:

1. G^* 的点数 = G 的面数;
2. G^* 的边数 = G 的边数;
3. G^* 的面数 = G 的点数 (G 连通);

Example 31. 设至少具有两个连通分支的平面图 G 的点数、边数、面数分别为 $n = 10, m = 10, \varphi = 3$, 求对偶图 G^* 的面数 φ^* ?

Solution. 根据对偶图的结论有

$$n^* = \varphi = 10, m^* = m = 10$$

又根据欧拉公式

$$n^* + m^* - \varphi^* = 2$$

求得 $\varphi^* = 9$.

Theorem 60. 设 G^* 是平面图 G 的对偶图, 则 G^* 必连通.

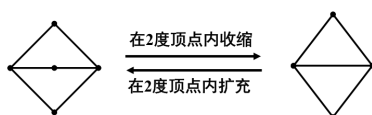
Theorem 61. 假定 G 是平面图, 则 $(G^*)^* = G$ 当且仅当 G 是连通图.

注: 注: 无论 G 是否连通, G^* 总是连通的, 因此 $(G^*)^*$ 不一定等于 G .

注: 同构的平面图可以有不同构的对偶图.

6.4 平面图的判定

可平面图 \Rightarrow 不含 K_5 或 $K_{3,3}$, 但是不含 K_5 或 $K_{3,3} \not\Rightarrow$ 可平面图.



Definition 30. 两个图 G_1 和 G_2 , 如果 $G_1 \cong G_2$, 或者通过反复在 2 度顶点内扩充和收缩它们能变成同构的, 则称 G_1 和 G_2 是同胚的或 G_1 和 G_2 在 2 度顶点内是同构的.

Theorem 62. 1. 图 G 是可平面的当且仅当它不含与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图.

2. 图 G 是可平面图当且仅当其基础简单图是可平面图.
3. 图 G 是可平面图当且仅当它的每个块是可平面图.
4. 简单图 G 是可平面图当且仅当它不含可收缩到 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图.

Example 32. 若图 G 与 K_5 同胚, 则至少从 G 中删去 1 条边就能使其成为可平面图.

Example 33. 彼得森图是不可平面图.

Theorem 63. 至少有 9 个点的简单可平面图补图是不可平面的，而 9 是这个数目中最小的一个。

Example 34. 设 G 是一个 n 阶简单图且 $n \geq 11$ ，则 G 与 G 的补图中至少有一个是非可平面图。

Solution. 不妨假设 G 是可平面图，则

$$m(G) \leq 3n - 6$$

由补图的定义知，

$$m(\overline{G}) = m(K_n) - m(G) \geq \frac{n(n-1)}{2} - (3n-6)$$

因此，

$$m(\overline{G}) - (3n-6) \geq \frac{n(n-1)}{2} - 2(3n-6) = \frac{1}{2}(n^2 - 13n + 24)$$

令 $f(n) = n^2 - 13n + 24$ ，显然当 $n \geq 11$ 时， $f(n) > 0$ 。

因此， $n \geq 11$ 时，

$$m(\overline{G}) > (3n-6)$$

所以， G 的补图不是可平面图。

Example 35 (考过证明). 证明：每个 5 连通的简单可平面图至少有 12 个顶点。

Solution. 设 G 是一个满足条件的 5 连通图，则 $\delta \geq \kappa \geq 5$ ，由握手定理知，

$$2m = \sum d(v) \geq 5n$$

又因为 G 是简单可平面图，故 $m \leq 3n - 6$ 。

因此， $2.5n \leq m \leq 3n - 6$ ，从而 $n \geq 12$ 。

Example 36. 若 G 是一个连通平面图且满足 $\delta \geq 3$ ，则 G 至少有一个面使得 $\deg(f) \leq 5$ 。

Solution. 若不然，则 $2m = \sum \deg(f) \geq 6\varphi$ ，由欧拉公式得，

$$\varphi = 2 - n + m \leq \frac{m}{3}$$

因此， $2m \leq 3n - 6$ ，另一方面，由 $\delta \geq 3$ 知， $2m \geq 3n > 3n - 6$ 。

这样导出矛盾。

Example 37. 若平面图 G 是自对偶的 (即 $G \cong G^*$)，则 $m = 2n - 2$ 。

Solution. 假设 $G \cong G^*$ 的阶数为 n^* ，则 $n^* = \varphi$ ，又因为 $G \cong G^*$ ，所以 $n^* = n$ ，从而 $\varphi = n$ 。

易知，自对偶图一定是连通图。因此，对于图 G ，欧拉公式成立。

故， $n - m + \varphi = n - m + n = 2$ 。因此， $m = 2n - 2$ 。

7 图的着色

边着色：边代表具体事件，点着色：边代表不能同时发生的事件。

7.1 图的边着色

在任何正常边着色中，与任一顶点关联的各边必须着不同色，由此推知：对无环图

$$\chi' \geq \Delta$$

Example 38. 1. $\chi'(K_{m,n}) = \Delta$.

2. 偶图的边色数 $\chi' = \Delta$.

3. 超立方体 Q_n 的边色数为 n .

4. 若 G 是简单图，则 $\chi' = \Delta$ 或 $\chi' = \Delta + 1$.

5. 设 G 是非空的简单图。若 G 中恰有一个度为 $\Delta(G)$ 的点，或 G 中恰有两个度为 $\Delta(G)$ 的点并且这两个点相邻，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$.

6. n 阶简单图 G ，若 $n = 2k + 1$ 且边数 $m > k\Delta$ ，则 $\chi' = \Delta + 1$.

7. 设 G 是奇阶 Δ 正则简单图，则 $\chi' = \Delta + 1$.

8. n 为奇数， $\chi'(K_n) = (n - 1) + 1 = n$ ， $\chi'(C_n) = 2 + 1 = 3$

9. n 为偶数， $\chi'(K_n) = n - 1$ ， $\chi'(C_n) = 2$

10. 彼得森图的边色数为 4.

注：Example 38第六点的证明如下：

因 G 是简单图，由边着色的定义可知，对 G 的任一正常边着色，着同色的边数最多为

$$\frac{n-1}{2} = \frac{(2k+1)-1}{2} = k$$

所以，若 $\chi' = \Delta$ ，则 G 的边数最多 $k\Delta$ ，于是， $m \leq k\Delta$ ，这与“ $m > k\Delta$ ”矛盾，故 $\chi' = \Delta + 1$.

7.2 顶点着色

Theorem 64. 1. 对任意的无环图 G ，均有 $\chi \leq \Delta + 1$.

2. 设 G 是简单连通图。假定 G 既不是完全图又不是奇圈，则 $\chi \leq \Delta$ 。(完全图和奇圈的 $\chi = \Delta + 1$)

3. 彼得森图的点色数为 3.

4. G 是非空简单图，若 G 中度数最大的点互不相邻，则 $\chi \leq \Delta$.

5. 对任意的简单平面图，均有 $\chi \leq 5$.

7.3 与色数有关的几类图

Theorem 65. 设 G 是唯一 k 可着色图, $k \geq 2$, 则

1. $\delta \geq k - 1$;
2. 每个唯一 $k(k \geq 2)$ 可着色图是 $(k - 1)$ 连通的.

注:

1. 唯一 1 可着色图是空图;
2. 唯一 2 可着色图是连通的偶图;
3. 唯一 4 可着色可平面图都是极大可平面图.

7.4 完美图 (从没考过)

1. 完全图、偶图均为完美图.
2. 偶图的补图是完美图.
3. 长度至少为 5 的奇圈及其补图均不是完美图.
4. 图 G 是完美图当且仅当 G 的补图是完美图.

7.5 着色的计数与色多项式

所谓着色的计数, 就是给定标定图 G 和颜色数 k , 求出正常顶点着色的方式数, 并用 $P_k(G)$ 表示.

1. 若 $k < \chi(G)$, 则 $P_k(G) = 0$, $\chi(G) = \min \{k | P_k(G) \geq 1\}$.
2. 若 G 为 n 阶空图, 则 $P_k(G) = k^n$.
3. $P_k(K_n) = k(k - 1) \dots (k - n + 1)$.
4. G 是具有 n 个点的树, 则 $P_k(G) = k(k - 1)^{n-1}$.

7.5.1 递推计数法 (掌握一种就行了)

记号 $G \cdot e$ 表示 G 中删去边 e 再重合 e 的端点后所得的图.

Theorem 66. 若 G 是简单图, 则对 G 的任意边 e , 有

$$P_k(G) = P_k(G - e) - P_k(G \cdot e)$$

证明. 设 $e = uv$, $G - e$ 的所有 k 着色可分为两类.

一类为 u 与 v 着不同色的 k 着色, 此类着色相当于 G 的着色, 另一类为 u 与 v 着同色的 k 着色, 此类着色相当于 $G \cdot e$ 表的着色, 其数目有 $P_k(G \cdot e)$ 个.

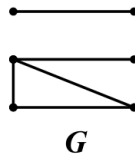
所以, $P_k(G - e) = P_k(G) + P_k(G \cdot e)$.

因此, $P_k(G) = P_k(G - e) - P_k(G \cdot e)$. □

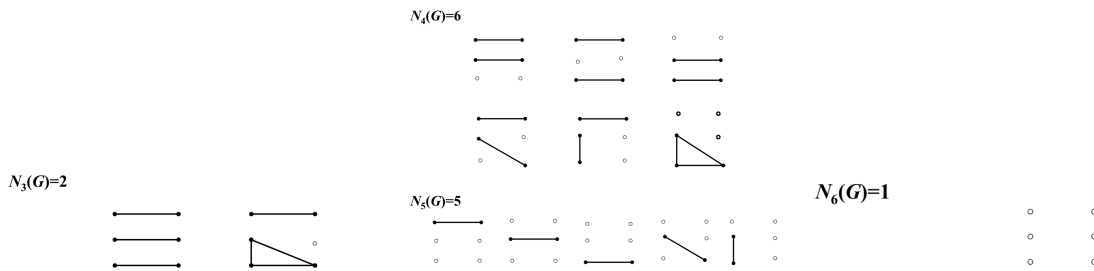
7.5.2 理想子图法 (必须掌握)

Definition 31. 设 H 是图 G 的生成子图. 若 H 的每个分支均为完全图, 则称 H 是 G 的一个理想子图. 用 $N_r(G)$ 表示 G 的具有 r 个分支的理想子图的个数.

Example 39. 求图 G 的全部理想子图



Solution. 全部理想子图构造过程



Theorem 67. 对 n 阶简单图 G , 有

$$P_k(G) = \sum_{i=1}^n N_i(\bar{G})[k]_i$$

其中 $[k]_i = k(k-1)\dots(k-i+1)$, 即先划分色组再对每个色组着色.

Theorem 68. 设 G 是具有 n 个点 m 条边的图, 则有

1. $N_n(G) = 1$
2. $N_{n-1}(G) = m$

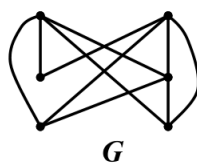
Definition 32. 设 G 是简单图, 令 $N_i(G) = r_i$, 称多项式

$$h(G, x) = \sum_{i=1}^n r_i x^i$$

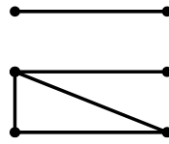
为图 G 的伴随多项式.

理想子图法: 先求出 G 的补图的伴随多项式, 再将多项式中的 x^i 换为 $[k]_i$ 便能得到简单图 G 的色多项式 $P_k(G)$.

Example 40. 求图 G 的色多项式 $P_k(G)$



Solution. G 的补图为



补图的伴随多项式为

$$h(\overline{G}, x) = \sum_{i=1}^n r_i x^i = 2x^3 + 6x^4 + 5x^5 + x^6 = h(H_1, x) \times h(H_2, x) = (x + x^2) \times (2x^2 + 4x^3 + x^4)$$

将 $x^i = [k]_i$ 代入伴随多项式中得到 $P_k(G)$:

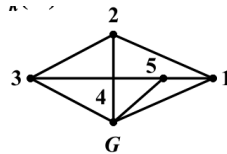
$$\begin{aligned} P_k(G) &= 2[k]_3 + 6[k]_4 + 5[k]_5 + [k]_6 \\ &= 2k(k-1)(k-2) + 6k(k-1)(k-2)(k-3) \\ &\quad + 5k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4) \\ &\quad + k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5) \end{aligned}$$

Theorem 69. 若 G 有 t 个分支 H_1, H_2, \dots, H_t , 且 H_i 的伴随多项式为 $h(H_i, x), i = 1, 2, \dots, t$, 则:

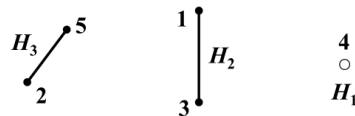
$$h(G, x) = \prod_{i=1}^t h(H_i, x).$$

注: 该定理说明, 在求 G 的补图的伴随多项式时, 可以分别求出它的每个分支的伴随多项式, 然后将它们作乘积.

Example 41. 求图 G 的色多项式 $P_k(G)$.



Solution. 画出 G 的补图,



求出补图中各个分支的伴随多项式

$$h(H_1, x) = x \quad h(H_2, x) = x + x^2 \quad h(H_3, x) = x + x^2$$

求出补图的伴随多项式

$$h(\overline{G}, x) = x(x + x^2)^2 = x^3 + 2x^4 + x^5$$

求出 G 的色多项式

$$\begin{aligned} P_k(G) &= k(k-1)(k-2) + 2k(k-1)(k-2)(k-3) \\ &\quad + k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4) \\ &= k(k-1)(k-2)(k^2 - 5k + 7). \end{aligned}$$

注: $P_k(G)$ 各项系数的符号正负相间. 同构的图有相同的色多项式, 但其逆不真.

8 Ramsey 定理

点独立数 + 点覆盖数 = n , 边独立数 + 边覆盖数 = n

$R(1, n) = R(n, 1) = 1, R(2, n) = n, R(3, 3) = 6.$

9 有向图

出 (入) 度记为 $d^+(v) (d^-(v))$.

Theorem 70. 设 $D = (V, E)$ 是一个有向图, 则有

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|$$

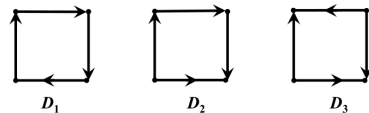
1. 矩阵 $A(D) = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 D 的邻接矩阵, 其中 $a_{i,j}$ 是以 v_i 作为始点, v_j 作为终点的边的数目, 所有元素之和等于边数.
2. 矩阵 $M(D) = (m_{ij})_{n \times m}$ 为 D 的关联矩阵, 关联矩阵每一列恰有一个“1”和一个“-1”, 第 i 行的 1 的个数等于 $d^+(v_i)$, -1 的个数等于 $d^-(v_i)$.

Definition 33. 设 $D = (V, E)$ 为一个有向图,

1. 若对 $\forall u, v \in V$, u 与 v 可互达, 则称 D 是强连通的.
2. 若对 $\forall u, v \in V$, 或 $u \rightarrow v$, 或 $v \rightarrow u$, 则称 D 是单向连通的.
3. 若 D 的基础图是连通的, 则称 D 是弱连通的, 简称连通.

注: 强连通一定单向连通, 单向连通一定弱连通.

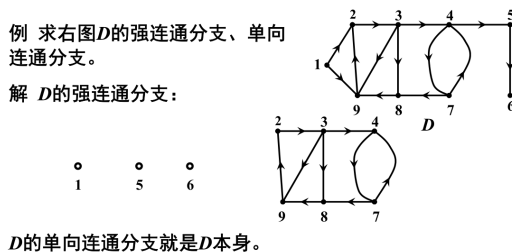
Example 42. 在下图中, D_1, D_2, D_3 为弱连通图; D_1, D_2 为单向连通图; D_1 为强连通图.



Theorem 71. 有向图 $D = (V, E)$ 是强连通的当且仅当 D 中存在含有所有顶点的有向闭途径.

Theorem 72. 设 D' 是有向图 $D = (V, E)$ 的一个子图. 如果 D' 是强连通的 (单向连通的、弱连通的), 且 D 中不存在真包含 D' 的子图是强连通的 (单向连通的、弱连通的), 则称 D' 是 D 的一个强连通分支 (单向连通分支、弱连通分支).

Example 43. 容易考填空题，求分支个数。



Theorem 73. 有向图 $D = (V, E)$ 的每个点位于且仅位于 D 的一个强 (弱) 连通分支中。

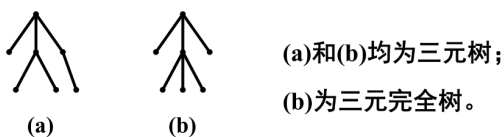
有向图 D 的某个顶点，可能会分属于 D 的若干个单向连通分支。因为单向连通关系不是等价关系。

Theorem 74. 若 G 是 2 边连通的，则 G 存在强连通定向图。

9.1 有向树、根树

Definition 34. 根树 T 中，若每个分支点至多有 m 个儿子，则称 T 为 m 元树；若每个分支点恰有 m 个儿子，则称 T 为 m 元完全树。

Example 44. 重点掌握 m 元完全树



Theorem 75. 设 m 元完全树 T 的树叶数为 t ，分支点数为 i ，则

$$(m - 1)i = t - 1.$$

证明. 由假设， T 有 $t + i$ 个顶点。再由树中点数与边数的关系知， T 有 $t + i - 1$ 条边。

因 m 元完全树的每个分支点的出度均为 m ，叶的出度为零，从而 T 的所有顶点的出度之和为 mi 。再由有向图中所有顶点的出度之和等于边数可得

$$mi = t + i - 1 \implies (m - 1)i = t - 1$$

□

Example 45 (以前考过). 二元完全树 ($m = 2$)，则分支点数为 $i = t - 1$ ，边数之和为 $m(T) = 2(t - 1)$ 。另外，高度为 h 的二元完全树最少有 $h + 1$ 片叶子。

9.2 最优树

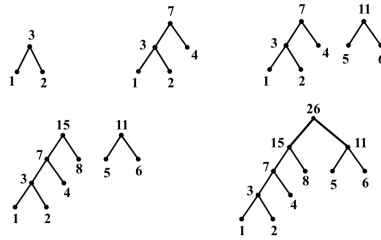
Definition 35. 设 T 是一棵有 t 片树叶的二元树，若对 T 的所有 t 片树叶赋以权值 (实数) w_1, w_2, \dots, w_t ，则称 T 为带权二元树；若带有权 w_i 的树叶的层数为 $l(w_i)$ ，则称

$$W(T) = \sum_{i=1}^t w_i l(w_i)$$

为 T 的权； $W(T)$ 最小的二元树称为最优树。

Example 46. 求带权 1, 2, 4, 5, 6, 8 的最优二元树。

Solution. 求解过程如下



设求得的最优二元树为 T ，则

$$W(T) = (1 + 2) \times 4 + 4 \times 3 + (5 + 6 + 8) \times 2 = 62.$$

10 图论及其应用复习

10.1 重要概念

1. 图、简单图、图的同构、度序列与图序列、补图与自补图、两个图的联图、两个图的积图、偶图

(1) 图：一个图是一个序偶 $\langle V, E \rangle$ ，记为 $G = (V, E)$ ，其中： V 是一个有限的非空集合，称为顶点集合，其元素称为顶点或点。用 $|V|$ 表示顶点数； E 是由 V 中的点组成的无序对构成的集合，称为边集，其元素称为边，且同一点对在 E 中可以重复出现多次。用 $|E|$ 表示边数。

(2) 简单图：无环无重边的图称为简单图。

(3) 图的度序列：一个图 G 的各个点的度 d_1, d_2, \dots, d_n 构成的非负整数组 (d_1, d_2, \dots, d_n) 称为 G 的度序列。

注：度序列的判定问题是重点（度数之和为偶数）。

(4) 图的图序列：一个非负数组如果是某简单图的度序列，称它为可图序列，简称图序列。

注：图序列的判定问题是重点（排成弱降）。

(5) 若简单图 G 与其补图同构，则称 G 为自补图 ($n/4$ 的余数是 0 或 1)。

(6) 联图和积图等等的点数和边数

(7) 偶图：所谓具有二分类 (X, Y) 的偶图（或二部图）是指一个图，它的点集可以分解为两个非空子集 X 和 Y ，使得每条边的一个端点在 X 中，另一个端点在 Y 中。

2. 树、森林、生成树、最短路算法、最小生成树、根树、 m 元完全树

(1) 树：不含圈的图称为无圈图，树是连通的无圈图。

(2) 最短路算法，掌握两个奇度顶点的最优环游方法。

(3) 最小生成树：在连通边赋权图 G 中求一棵总权值最小的生成树。该生成树称为最小生成树。

注：要求熟练掌握最小生成树的求法。（破圈法）

(4) 根树：一棵非平凡的有向树 T ，如果恰有一个顶点的入度为 0，而其余所有顶点的入度为 1，这样的有向树称为根树。

(5) m 元完全树：对于根树 T ，若每个分支点至多 m 个儿子，称该根树为 m 元根树；若每个分支点恰有 m 个儿子，称它为 m 元完全树。

注：对于完全 m 元树，要弄清其结构。 $(m-1)i = t - 1$ ，记住完全 2 元树的相关结论。

3. 途径（闭途径）、迹（闭迹）、路（圈）、最短路、连通图、连通分支、点连通度与边连通度
注：上述概念分别在第 1、3 章。

4. 欧拉图、欧拉环游、欧拉迹、哈密尔顿圈、哈密尔顿图、哈密尔顿路、中国邮递员问题、最优 H 圈

(1) 欧拉图与欧拉环游：对于连通图 G ，如果 G 中存在经过每条边的闭迹，则称 G 为欧拉图，简称 G 为 E 图。欧拉闭迹又称为欧拉环游，或欧拉回路。

欧拉图的判定一定要注意连通性。

(2) 欧拉迹：对于连通图 G ，如果 G 中存在经过每条边的迹，则称该迹为 G 的一条欧拉迹（只含两个奇度顶点）。

(3) 哈密尔顿图与哈密尔顿圈：如果经过图 G 的每个顶点恰好一次后能够回到出发点，称这样的图为哈密尔顿图，简称 H 图。所经过的闭途径是 G 的一个生成圈，称为 G 的哈密尔顿圈。

5. 匹配、最大匹配、完美匹配、最优匹配、因子分解

(1) 匹配：如果 M 是图 G 的边子集（不含环），且 M 中的任意两条边没有共同顶点，则称 M 是 G 的一个匹配或边独立集。

(2) 最大匹配与完美匹配：如果 M 是图 G 的包含边数最多的匹配，称 M 是 G 的一个最大匹配。特别是，若最大匹配饱和了 G 的所有顶点，称它为 G 的一个完美匹配。

(3) 最优匹配：设 $G = (X, Y)$ 是边赋权完全偶图， G 中的一个权值最大的完美匹配称为 G 的最优匹配。

(4) 因子分解：所谓一个图 G 的因子分解，是指把图 G 分解为若干个边不重的因子之并。

注：要弄清楚因子分解和完美匹配之间的联系与区别。

6. 平面图、极大平面图、极大外平面图、平面图的对偶图

- (1) 平面图：如果能把图 G 画在平面上，使得除顶点外，边与边之间没有交叉，称 G 可以嵌入平面，或称 G 是可平面图.
- (2) 极大平面图：设 G 是简单可平面图，如果 G 是 K_i ($1 \leq i \leq 4$)，或者在 G 的任意非邻接顶点间添加一条边后，得到的图均是非可平面图，则称 G 是极大可平面图. 极大可平面图的平面嵌入称为极大平面图.
- (3) 极大外平面图：若一个可平面图 G 存在一种平面嵌入，使得其所有顶点均在某个面的边界上，称该图为外可平面图. 外可平面图的一种外平面嵌入，称为外平面图.
- (4) 平面图的对偶图的相关结论.

7. 边色数、点色数、色多项式

- (1) 边色数：设 G 是图，对 G 进行正常边着色需要的最少颜色数，称为 G 的边色数，记为 $\chi'(G)$.
- (2) 点色数：对图 G 正常顶点着色需要的最少颜色数，称为图 G 的点色数，用 $\chi(G)$ 表示.
- (3) 色多项式：对图进行正常顶点着色，其方式数 $P_k(G)$ 是 k 的多项式，称为图 G 的色多项式.

8. 强连通图、单向连通图、弱连通图

- (1) 强连通图：若 D 中任意两点是双向连通的，称 D 是强连通图.
- (2) 弱连通图：若 D 的基础图是连通的，称 D 是弱连通图.
- (3) 单向连通图：若 D 中任意两点是单向连通的，称 D 是单向连通图.

10.2 重要结论

1. 握手定理及其推论

- 定理 1：图 G 中所有顶点的度数和等于边数的 2 倍.
- 推论 1：在任何图中，奇点个数为偶数.
- 推论 2：正则图的阶数和度数不同时为奇数.

2. Turan 定理

- 若 G 是 n 阶简单图，并且不包含 K_{l+1} ，则边数

$$m(G) \leq m(T_{l,n})$$

此外，仅当 $G \cong T_{l,n}$ ， $m(G) = m(T_{l,n})$

- $K_{l+1} \not\subseteq G$ ，则 $m(T_{l,n}) = C_l^2 \left(\frac{n}{l}\right)^2$.

3. 树的性质

定理 3：设 T 是 (n, m) 树，则 $m = n - 1$.

4. 最小生成树算法 (破圈法)

5. 偶图判定定理

定理 4: 图 G 是偶图当且仅当 G 中没有奇圈.

6. Menger 定理

定理 5: (1)、设 x 与 y 是图 G 中的两个不相邻点, 则 G 中分离点 x 与 y 的最小点数等于独立的 (x, y) 路的最大数目;

(2)、设 x 与 y 是图 G 中的两个不相邻点, 则 G 中分离点 x 与 y 的最小边数等于 G 中边不重的 (x, y) 路的最大数目.

7. 欧拉图、欧拉迹的判定

定理 6: 下列命题对于非平凡连通图 G 是等价的:

- (1) G 是欧拉图;
- (2) G 的顶点度数为偶数;
- (3) G 的边集合能划分为圈.

推论: 连通非欧拉图 G 存在欧拉迹当且仅当 G 中只有两个顶点度数为奇数 (如何求最短环游).

8. H 图的判定

(1) 定理 7 (必要条件): 若 G 为 H 图, 则对 $V(G)$ 的任一非空顶点子集 S , 成立:
 $\omega(G - S) \leq |S|$.

(2) 定理 8 (充分条件): 对于 $n \geq 3$ 的简单图 G , 如果 $\delta(G) \geq n/2$, 则 G 是 H 图.

(3) 定理 9 (充分条件): 对于 $n \geq 3$ 的简单图 G , 如果 G 中的任意两个不相邻顶点 u 与 v , 有 $d(u) + d(v) \geq n$, 则 G 是 H 图.

(4) (充分条件): 设 G 是 $n \geq 3$ 的简单图, 若 G 的闭包是完全图, 则 G 是 H 图.

(5) 定理 10 (闭包定理): 图 G 是 H 图当且仅当它的闭包是 H 图.

(6) 定理 11 (度序列判定法): 设简单图 G 的度序列是 (d_1, d_2, \dots, d_n) , 这里, $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, 并且 $n \geq 3$. 若对任意的 $m < n/2$, 或有 $d_m > m$, 或有 $d_{n-m} \geq n - m$, 则 G 是 H 图.

(7) 定理 12 (充分条件): 设 G 是 n 阶简单图. 若 $n \geq 3$ 且

$$|E(G)| > \binom{n-1}{2} + 1$$

则 G 是 H 图; 并且, 具有 n 个顶点 $\binom{n-1}{2} + 1$ 条边的非 H 图只有 $C_{1,n}$ 以及 $C_{2,5}$.

9. 偶图匹配与因子分解

- (1) 定理 13 (Hull): 设 $G = (X, Y)$ 是偶图, 则 G 存在饱和 X 的每个顶点的匹配的充要条件是:

$$\text{对 } \forall S \subseteq X, \text{ 有 } |N(S)| \geq |S|.$$

- (2) 推论: 若 G 是 $k(k > 0)$ 正则偶图, 则 G 存在完美匹配.
- (3) 定理 14: 在偶图中, 最大匹配的边数等于最小覆盖的顶点数.
- (4) 定理 15: K_{2n} 可一因子分解, 分解个数 $(2n - 1)!!$.
- (5) 定理 16: 具有 H 圈的三正则图可一因子分解.
- (6) 定理 17: K_{2n+1} 可 2 因子分解.
- (7) 定理 18: K_{2n} 可分解为一个 1 因子和 $n - 1$ 个 2 因子之和.
- (8) $2k$ 正则偶图可 2 因子分解.
- (9) 定理 19: 每个没有割边的 3 正则图是一个 1 因子和 1 个 2 因子之和.

10. 平面图及其对偶图

- (1) 定理 20: 设 G 是平面图, 则次数之和等于 2 倍的边数.
- (2) 定理 21 (欧拉公式): 设 $G = (n, m)$ 是连通平面图, φ 是 G 的面数, 则 $n - m + \varphi = 2$.
- (3) 推论 1: 设 G 是具有 n 个点 m 条边 φ 个面的连通平面图, 如果对 G 的每个面 f , 有 $\text{def}(f) \geq l \geq 3$, 则:

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2).$$

- (4) 推论 2: 设 $G = (n, m)$ 是简单平面图, 则 $m \leq 3n - 6$.
- (5) 推论 3: 设 G 是简单平面图, 则 $\delta(G) \leq 5$.
- (6) 平面图 G 的对偶图必然连通.
- (7) 设 G 是至少有 3 个顶点的平面图, 则 G 是极大平面图, 当且仅当 G 的每个面的次数是 3 且为简单图 (三角形特征).

11. 着色问题

- (1) 定理 24: 完全二部图的边色数等于顶点度数的最大值.
- (2) 定理 25: 二部图的边色数等于顶点度数的最大值.
- (3) 定理 26: 若 G 是简单图, 则边色数要么为最大度, 要么等于最大度 + 1.
- (4) 定理 27: 设 G 是简单图且 $\Delta(G) > 0$. 若 G 中只有一个最大度点或恰有两个相邻的最大度点, 则边色数等于最大度.
- (5) 设 G 是简单图. 若点数 $n = 2k + 1$ 且边数 $m > k\Delta$, 则边色数等于最大度 + 1.
- (6) 定理 29: 设 G 是奇数阶 Δ 正则简单图, 若 $\Delta > 0$, 则边色数等于最大度 + 1.
- (7) 定理 30: 对任意的图 G , $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

(8) 定理 31: 若 G 是连通的简单图, 并且它既不是奇圈又不是完全图, 则 $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

(9) 定理 32: 设 G 为简单图, 则对任意 $e \in E(G)$, 有 $P_k(G) = P_k(G - e) - P_k(G \cdot e)$ (递推计数法)

(10) 理想子图计数方法 (先画补图)

12. 根树问题

定理 32: 在 m 完全元树 T 中, 若树叶数为 t , 分支点数为 i , 则 $(m - 1)i = t - 1$.

11 特殊图的结论

11.1 偶图

(1) 一个图是偶图当且仅当它不包含奇圈.

(2) n 阶完全偶图 K_{n_1, n_2} 的边数 $m = n_1 n_2$, 且 $m \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$

(3) 设 G 为具有二分类 (X, Y) 的偶图, 则 G 包含饱和 X 的每个顶点的匹配当且仅当

$$|N(S)| \geq |S|$$

对所有 $S \subseteq X$ 成立.

(4) 若 G 是 k 正则偶图 ($k > 0$), 则 G 有完美匹配.

(5) 在偶图中, 最大匹配中的边数等于最小覆盖中的点数.

(6) k 正则偶图 ($k > 0$) 是 1-可因子化的.

(7) 设 l 是赋权完全偶图 $G = (X, Y)$ 的可行顶点标号, 若相等子图 G_l 有完美匹配 M^* , 则 M^* 是 G 的最优匹配.

(8) 偶图的边色数 $\chi' = \Delta$.

(9) 偶图及其补图均为完美图.

(10) k 正则二部图 ($k \geq 2$) 无割边.

(11) 图 $K_{m, n}$ ($m \leq n$) 的最小覆盖包含的点数为 m .

11.2 彼得森图

(1) 彼得森图不是 H 图.

(2) 彼得森图有完美匹配.

(3) 彼得森图不可 1-因子分解

(4) 彼得森图是不可平面图.

- (5) 彼得森图的边色数为 4, 点色数为 3.
- (6) 彼得森图的点连通度和边连通度分别为 3 和 3.

12 重点知识梳理 (考查选择填空)

12.1 图的基本概念

- 3 个顶点的非同构的所有简单图有 4 个, 4 个顶点的非同构的所有简单图有 11 个.
- 具有 m 条边的简单标号图的生成子图的个数为 2^m .
- 图 $G_1 = (n_1, m_1)$ 与图 $G_2 = (n_2, m_2)$ 的积图 $G_1 \times G_2$ 的点数为 $n_1 n_2$, 边数为 $n_1 m_2 + n_2 m_1$.
- 图 $G_1 = (n_1, m_1)$ 与图 $G_2 = (n_2, m_2)$ 的联图 $G_1 \vee G_2$ 的点数为 $n_1 + n_2$, 边数为 $m_1 + m_2 + n_1 n_2$.
- 超立方体 Q_n 是具有 2^n 个顶点, $n2^{n-1}$ 条边的 n 正则二部图.
- A^2 的元素 $a_{ii}^{(2)}$ 是 v_i 的度数, A^3 的元素 $a_{ii}^{(3)}$ 是含 v_i 的三角形的数目的两倍.
- v_i 到 v_j 长度为 k 的通道的数目是 $a_{ij}^{(k)}$.
- 矩阵 A 的所有特征值的平方和等于该图边数的 2 倍.
- K_n 的最大特征值为 $n - 1$.
- 完全 l 部图 K_{n_1, n_2, \dots, n_l} 的点数为: $\sum_{i=1}^l n_i$, 边数 $\sum_{1 \leq i < j \leq l} n_i n_j$.
- n 阶完全偶图 K_{n_1, n_2} 的边数 $m = n_1 n_2$, 且 $m \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$.
- 具有 m 条边的 n 阶简单偶图, 则 $m \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$.
- $K_{l+1} \not\subseteq G$, 则 $m(T_{l,n}) = C_l^2 \left(\frac{n}{l}\right)^2$.

12.2 树

- 非同构的 4 阶、5 阶、6 阶树的个数分别为 2、3、6.
- 由 k 颗树组成的森林满足 $m = n - k$.
- $\tau(K_n) = n^{n-2}$, $\tau(k_{m,n}) = n^{m-1} m^{n-1}$. $K_5 = 125$, $K_{3,3} = 81$.

12.3 图的连通度

- 阶数 ≥ 3 的无环连通图, 有割边 \Rightarrow 有割点.
- $(n \geq 3)$ 块没有割边, 块有圈.
- (1) $\kappa(K_n) = n - 1$, (2) $\kappa(C_n) = 2$ 其中 C_n 为 n 圈, $n \geq 3$.

4. (1) $\lambda(K_n) = n - 1$, (2) $\lambda(C_n) = 2$ 其中 C_n 为 n 圈, $n \geq 2$.
5. k 连通一定是 k 边连通的.
6. $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$.
7. $\kappa(G) \leq \lfloor 2m/n \rfloor$.
8. 图 G 的顶点数为 n 且 7 连通, 则其边数至少为 $\lceil 7n/2 \rceil$.

12.4 Euler 图与 H 图

1. Euler 图没有割边, 有可能有割点 (八字形的图)
2. $K_{m,n}$ (m, n 均为偶数), 则欧拉环游中至少包含 mn 条边.
3. 一必要 ($\omega(G - S) \leq |S|$), 三充分 ($\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, $d(u) + d(v) \geq n$, 闭包是完全图), 一充要 (闭包是 H 图).
4. 若对任意的 $m < n/2$, 或有 $d_m > m$, 或有 $d_{n-m} \geq n - m$, 则 G 是 H 图.
5. (充分条件:) $|E(G)| > \binom{n-1}{2} + 1$, 则 G 是 H 图.
6. 具有 5 个点的度极大非哈密尔顿图族为 $C_{1,5}$ 和 $C_{2,5}$.
7. (充分条件:) 若 G 是 $n \geq 3$ 的非 H 简单图, 则 G 度弱于某个 $C_{m,n}$ 图.
8. n 阶完全图中 H 圈的个数为 $(n-1)!$.

12.5 匹配与因子分解

1. K_{2n} 和 $K_{n,n}$ 中不同的完美匹配的个数分别是 $(2n-1)!!$, $n!$.
2. 每个没有割边的 3 正则图都有完美匹配.
3. 有割边的 3 正则图不一定就没有完美匹配.
4. 彼得森图有完美匹配, 3 正则哈密尔顿图存在完美匹配.
5. 奇数阶图不能有 1-因子.
6. 具有 Hamilton 圈的 3 正则图是 1-可因子化的.
7. 1-可因子分解的 3 正则图不一定有 Hamilton 圈.
8. 若 3 正则图有割边, 则不可 1-因子分解.
9. 无割边的 3 正则图可能也没有 1-因子分解.
10. K_{2n} 的不同的 1-因子数目有 $(2n-1)!!$.
11. 一个连通图是 2-可因子化的当且仅当它是偶数度正则图.

12.6 平面图

1. $\sum \deg(f) = 2m$.
2. 简单平面图满足 $m \leq 3n - 6$.
3. 设 G 是极大平面图, 则 G 必连通; 若 G 的阶数至少等于 3, 则 G 无割边.
4. 极大平面图: 三角形特征.
5. 极大平面图满足:
 - (a) $m = 3n - 6$;
 - (b) $\varphi = 2n - 4$.
6. 极大外平面图当且仅当其外部面的边界是圈, 内部面是三角形.
7. 极大外平面图有 $n - 2$ 个内部面.
8. 每个至少有 7 个顶点的外可平面图补图不是外可平面图, 且 7 是这个数目的最小者.
9. 至少有 9 个点的简单可平面图的补图是不可平面的, 而 9 是这个数目中最小的一个.
10.
 - (a) G^* 的点数 = G 的面数;
 - (b) G^* 的边数 = G 的边数;
 - (c) G^* 的面数 = G 的点数 (G 连通);
11. 同构的平面图可以有不同构的对偶图.
12. 图 G 是可平面的当且仅当它不含与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图.

12.7 图的着色

1. $\chi'(K_{m,n}) = \Delta$, 偶图的边色数 $\chi' = \Delta$.
2. n 阶简单图 G , 若 $n = 2k + 1$ 且边数 $m > k\Delta$, 则 $\chi' = \Delta + 1$.
3. 设 G 是奇阶 χ 正则简单图, 则 $\chi' = \Delta + 1$.
4. n 为奇数, $\chi'(K_n) = (n - 1) + 1 = n$, $\chi'(C_n) = 2 + 1 = 3$
5. n 为偶数, $\chi'(K_n) = n - 1$, $\chi'(C_n) = 2$
6. 完全图和奇圈的 $\chi = \Delta + 1$.
7. 彼得森图的点色数为 3, 边色数是 4.
8. G 是具有 n 个点的树, 则 $P_k(G) = k(k - 1)^{n-1}$.
9. $P_k(G) = \sum_{i=1}^n N_i(\overline{G})[k]_i$.

10. $h(G, x) = \prod_{i=1}^t h(H_i, x)$.

11. 同构的图有相同的色多项式，但其逆不真.

12.8 容易犯错的

1. 关于序列 $(7, 5, 4, 3, 3, 3, 2)$ 只能是非简单图的度序列.
2. 邻接矩阵的所有特征值的平方和等于该图边数的 2 倍.
3. 连通图一定是树 (错), 无圈的连通图一定是树 (对); 无回路但添加一条边后有回路的图是树 (错), 无回路但添加一条边后有唯一回路的图是树 (对).
4. k 连通一定是 k 边连通的. 若图 G 是 k 连通的, 则 $\kappa(G) \geq k$.
5. 顶点度数为偶数的图一定是欧拉图 (错), 顶点度数为偶数的连通图一定是欧拉图 (对). 且欧拉图一定没有割边 (圈), 但有可能有割点.
6. 哈密尔顿图一定没有割边, 但有可能有割点.
7. 一个图的闭包不一定是完全图, 比如长度为 5 的圈.
8. 无割边的 3 正则偶图一定存在完美匹配, 3 正则哈密尔顿图存在完美匹配.
9. 无割边的 3 正则图可以 1-因子分解 (错). $k_{3,3}$ 可以, 彼得森图不可以.
10. 有割边的 3 正则图不一定就没有完美匹配, 但一定不可 1 因子分解.
11. 完全图 K_{2n} 是 n 个哈密尔顿圈的并 (错), 实际上 K_{2n} 每个点的度数为 $2n - 1$, 没有 2-因子, 自然不可以 2-因子分解.
12. 若 (n, m) 图 G 是极大平面图且 $n \geq 3$, 则 $m = 3n - 6$, 若 (n, m) 图 G 是极大外平面图且 $n \geq 3$, 则 $m = 2n - 3(n - m + n - 2 + 1 = 2)$.
13. 阶数至少为 3 的极大外平面图的每个面均是三角形 (错), 因为它的外部面是多边形, 内部面才是三角形.
14. 阶数至少为 3 的极大外平面图一定是哈密尔顿图 (对).
15. G 的点数等于 G^* 的面数 (错), 当 G 连通时才成立.
16. $G \cong (G^*)^*$ (错), 当 G 连通时才成立.
17. 若 $G_1 \cong G_2$, 则 $G_1^* \cong G_2^*$ (错), 同构的图可以有不同构的对偶图.
18. 超立方体 Q_6 的点色数和边色数分别为 2 和 6.
19. 已知树 T 的阶数为 n , 则其多项式为 $k(k - 1)^{n-1}$.
20. 高度为 h 的完全二元树至少有 $h + 1$ 片叶子.

21. 每个至少有 7 个顶点的外可平面图补图不是外可平面图, 且 7 是这个数目的最小者.
22. 至少有 9 个点的简单可平面图补图是不可平面的, 而 9 是这个数目中最小的一个.
23. 完全图: 点色数为 n , 边色数为 $n-1$ (n 为偶数), n (n 为奇数), 点连通度和边连通度均为 $n-1$.
24. 在有向图中, 顶点的出度之和等于入度之和等于边数; 在有向图的邻接矩阵中, 所有元素之和等于边数. 在无环的有向图的关联矩阵中, 各列元素之和均等于 0.
25. 有向强连通图中顶点间的强连通关系是等价关系, 而单向连通不是等价关系; 有向图 D 中任意一顶点只能处于 D 的某一个强连通分支中, 有向图 D 中顶点 v 可能处于 D 的不同的单向连通分支中.

13 一些往年考题

13.1 填空题

1. 已知图 G 有 10 条边, 4 个度数为 3 的顶点, 其余顶点的度数均小于 2, 则 G 中至少有 8 个顶点.
2. m 条边的简单图 G 中所有不同的生成子图 (包括 G 和空图) 的个数为 2^m .
3. 4 个顶点的非同构的简单图有 11 个.
4. 不同构的 3 阶单图共有 4 个.
5. 设 n 阶图 G 是具 k 个分支的森林, 则其边数 $m(G) = \underline{n - k}$.
6. n 阶树 ($n \geq 3$) 的点连通度为 1; 边连通度为 1; 点色数为 2; 若其最大度为 Δ , 则边色数为 Δ .
7. 图 G_1 的最小生成树各边权值之和为 28.

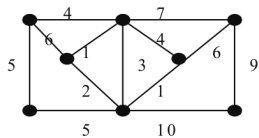
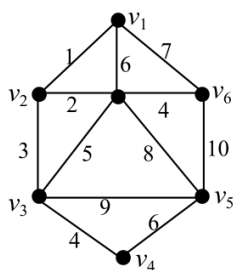


图 G_1

8. 若 W 是图 G 中一条包含所有边的闭通道, 则 W 在这样的闭通道中具有最短长度的充要条件是:
 - (1) 每一条边最多重复经过 1 次;
 - (2) 在 G 的每一个圈上, 重复经过的边的数目不超过圈的长度的 一半.
9. 5 阶度极大非哈密尔顿图族有 C_1^5 和 C_2^5 .

10. 6 阶度极大非哈密尔顿图族是 $C_{1,6}$.
11. 完全图 K_4 的生成树的数目为 16 ; 阶为 6 的不同构的树有 6 棵.
12. 具有 5 个结点的自补图的个数有 2 个.
13. 在有 6 个点, 12 条边的简单连通平面图中, 每个面均由 3 条边组成. (提示: 符合外平面图形的边数和面数条件, 就有三角形特征.)
14. 彼得森图的点色数为 3; 边色数为 4 ; 点独立数为 3.
15. 存在好算法的是 最优匹配问题.
16. 无向完全图 K_n (n 为奇数), 共有 $(n-1)!$ 条没有公共边的哈密尔顿圈.
17. 完全图 K_{2n} 能够分解为 $(2n-1)$ 个边不相交的 1 因子之并.
18. 完全图 K_{2n} 有 $(2n-1)!!$ 个不同的 1 因子.
19. 下边赋权图中, 最小生成树的权值之和为 20.



20. 若 n 阶单图 G 的最大度是 Δ , 则其补图的最小度 $\delta(\overline{G}) = \underline{n-1-\Delta}$.
21. 若 n 阶单图 G 的最小度是 δ , 则其补图的最大度 $\Delta(\overline{G}) = \underline{n-1-\delta}$.
22. 若图 $G_1 = (n_1, m_1), G_2 = (n_2, m_2)$, 则它们的联图 $G = G_1 \vee G_2$ 的顶点数 = $\underline{n_1 + n_2}$, 边数 = $\underline{m_1 + m_2 + n_1 n_2}$.
23. G 是一个完全 l 部图, n_i 是第 i 部的的顶点数 ($i = 1, 2, 3, \dots, l$), 则它的边数为 $\underline{\sum_{1 \leq i < j \leq l} n_i n_j}$.
24. 若 $G = K_n$, 则 G 的谱 $\text{spec}(G) = \underline{\begin{pmatrix} -1 & n-1 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}}$.
25. 5 个顶点的不同构的树的棵数为 3.
26. G 为具有二分类 (X, Y) 的偶图, 则 G 包含饱和 X 的每个顶点的匹配的充分必要条件是 $\underline{|N(S)| \geq |S|}$ 对所有的 $S \subseteq X$ 都成立.
27. n 方体的点色数为 2, 边色数为 n .
28. 设 $G = K_{n,n}$, 则其最大特征值为 n .

29. $n(n \geq 3)$ 阶极大外平面图内部面个数为 $\underline{n-2}$; 3 阶以上的极大平面图的边数 m 和顶点数 n 的关系为 $\underline{m = 3n - 6}$.
30. 若自补图 G 的顶点数是 n , 则 G 的边数 $m(G) = \underline{\frac{n(n-1)}{4}}$.
31. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是图 G 的推广的邻接矩阵, 则 $A^k = (a_{ij}^{(k)})_{n \times n}$ (k 是正整数) 的 $a_{ij}^{(k)}$ 表示的意义为 由 v_i 到 v_j 的长度为 k 的通道数目.
32. 设 8 阶图 G 中没有三角形, 则 G 能够含有的最多边数为 16.
33. 三角形图的生成树的棵数为 3.
34. 图 G 是 k 连通的, 则 G 中任意点对间至少有 k 条内点不交路.
35. $n(n \geq 3)$ 阶极大平面图的边数等于 $\underline{3n - 6}$; $n(n \geq 3)$ 阶极大外平面图的顶点都在外部面边界上时, 其内部面共有 $n - 2$ 个.
36. 完全 m 元根树有 t 片树叶, i 个分支点, 则其总度数为 mi . (或者 $2(i + t - 1)$)
37. 图 $G_1 = (n_1, m_1)$ 与图 $G_2 = (n_2, m_2)$ 的积图 $G_1 \times G_2$ 的边数为 $n_1m_2 + n_2m_1$.
38. 设简单图 G 的邻接矩阵为 A , 且 $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则图 G 的边数为 6.
39. 设 G 是 n 阶简单图, 且不含完全子图 K_3 , 则其边数一定不会超过 $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.
40. 由 3 个连通分支 K_1, K_2, K_4 组成的平面图, 则其共有 4 个面.
41. 设图 G 与 K_5 同胚, 则至少从 G 中删掉 1 条边, 才可能使其成为可平面图.
42. 奇圈的边色数为 3.
43. n 阶简单 k 正则图 G 的补图的边数为 $\frac{n(n-1-k)}{2}$.
44. 4 个顶点的不同构树的个数为 2.
45. $2n$ 阶完全图共有 $(2n-1)!!$ 个不同的完美匹配.
46. n 完全图的不同定向方式有 $2^{n(n-1)/2}$ 种.
47. 图 3 中块的个数为 4.

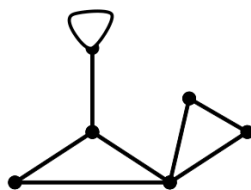


图 3

48. 图 4 中强连通分支的个数为 3.

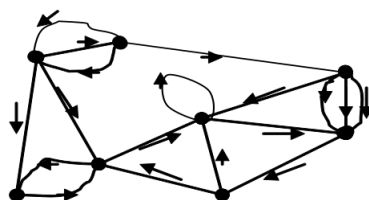


图 4

13.2 选择题

1. 下列说法中不正确的是 (C)
 - (A) 每个连通图至少包含一棵生成树;
 - (B) k 正则偶图 ($k > 0$) 一定存在完美匹配;
 - (C) 平面图 $G \cong (G^*)$, 其中 G^* 表示 G 的对偶图;
 - (D) 完全图 K_{2n} 可一因子分解.
2. 关于平面图 G 和其几何对偶图 G^* 的关系, 下列说法中不正确的是 (C)
 - (A) 平面图 G 的面数等于其对偶图的顶点数;
 - (B) 平面图 G 的边数等于其对偶图的边数;
 - (C) 平面图 $G \cong (G^*)$, 其中 G^* 表示 G 的对偶图;
 - (D) 平面图的对偶图是连通平面图.
3. 下列无向图 $G = (n, m)$ 一定是树的是 (D)
 - (A) 连通图;
 - (B) 无回路但添加一条边后有回路的图; (缺少唯一)
 - (C) 每对结点间都有路的图; (缺少唯一)
 - (D) 连通且 $m = n - 1$.
4. 下列说法正确的是 (A)
 - (A) 非平凡树和 $n(n \geq 2)$ 方体都是偶图;
 - (B) 任何一个 3 正则图都可 1-因子分解; (3 正则偶图都可 1-因子分解)
 - (C) 可 1-因子分解的 3 正则图中一定存在哈密顿圈; (存在 H 圈的 3 正则图可 1-因子分解, 反之不成立)
 - (D) 平面图 G 的对偶图的对偶图与 G 是同构的. (连通平面图才行)
5. 对于有向图, 下列说法不正确的是 (D)
 - (A) 有向图 D 中任意一顶点 v 只能处于 D 的某一个强连通分支中;

- (B) 有向图 D 中顶点 v 可能处于 D 的不同的单向分支中;
- (C) 强连通图中的所有顶点必然处于强连通图的某一有向回路中;
- (D) 有向连通图中顶点间的单向连通关系是等价关系.
6. 下列说法中正确的是 (C)
- (A) 连通 3 正则图必存在完美匹配; (连通 3 正则偶图必存在完美匹配;)
- (B) 有割边的连通 3 正则图一定不存在完美匹配; (可能存在也可能不存在, 无割边的连通 3 正则图一定存在完美匹配)
- (C) 存在哈密顿圈的 3 正则图必能 1-因子分解; (注意: 该命题反之不成立)
- (D) 所有完全图都能作 2-因子分解. (偶度正则图 K_{2n+1})
7. 下列说法错误的是 (D)
- (A) 非平凡树是偶图;
- (B) 超立方体图 (n 方体, $n \geq 1$) 是偶图;
- (C) 存在完美匹配的圈是偶图;
- (D) 偶图至少包含一条边.
8. 下列说法错误的是 (D)
- (A) 一个非平凡图是偶图, 当且仅当它不含有奇圈;
- (B) 超立方体图 (N 方体, $n \geq 1$) 是偶图;
- (C) 非平凡森林是偶图;
- (D) 不含三角形的图都是偶图.
9. 下面说法正确的是 (C)
- (A) k 连通图的连通度一定为 k ;
- (B) 完全图一定没有割边;
- (C) $n(n \geq 3)$ 阶图 G 是块, 则 G 中无环, 且任意两点均位于同一圈上;
- (D) 非平凡树一定有割点.
10. 下列说法错误的是 (A)
- (A) 若图 G 是哈密顿图, 则其闭包一定为完全图;
- (B) 设 $n(n \geq 3)$ 阶单图的任意两个不邻接顶点 u 与 v 满足 $d(u) + d(v) \geq n$, 则其闭包一定为完全图;
- (C) 若 (n, m) 单图 G 的边数 $m > \binom{n-1}{2} + 1$, 且 $n \geq 3$, 则 G 是哈密顿图;
- (D) 若 G 是 $n \geq 3$ 的非 H 单图, 则 G 度弱于某个 $C_{m,n}$ 图.

13.3 证明题

Example 47. 设 G 与其补图 \bar{G} 的边数分别为 m_1, m_2 , 求 G 的阶数.

Solution. 设 G 的阶数为 n ,

$$m_1 + m_2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

所以 $n^2 - n - 2m_1 - 2m_2 = 0$, 得 $n = \frac{1 + \sqrt{1 + 8(m_1 + m_2)}}{2}$.

Example 48. 证明:

(1) 若 G 恰有两个奇度点 u 与 v , 则 u 与 v 必连通;

(2) 一棵树至多只有一个完美匹配 (10分).

Solution. (1) 因为任意一个图的奇度点个数必然为偶数个, 若 G 恰有两个奇度点 u 与 v , 且它们不连通, 那么就会得出一个连通图只有一个奇度点的矛盾结论. 所以若 G 恰有两个奇度点 u 与 v , 则 u 与 v 必连通.

(2) 若树有两个相异的完美匹配 M_1, M_2 , 则 $M_1 \Delta M_2 \neq \Phi$ 且 $T[M_1 \Delta M_2]$ 中的每个顶点的度数为 2, 则 T 中包含圈, 这与 T 是树矛盾!

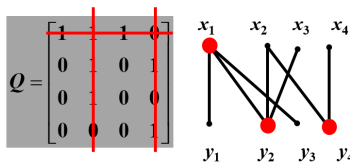
Example 49. 矩阵的一行或一列称为矩阵的一条线, 利用哥尼定理证明: 布尔矩阵中, 包含了所有“1”的最少数目, 等于具有性质“任意两个 1 都不在同一条线上的 1 的最大数目”. (注: 哥尼定理: 在偶图中, 最大匹配包含的边数等于最小点覆盖包含的顶点数)

Solution. 设布尔阵是 n 行 m 列矩阵, 把它模型为一个偶图如下: 每行每列分别用一个点表示, X 表示行点集合, Y 表示列点集合, 两点连线. 当且仅当该行该列元为 1.

于是, 包含了所有“1”的线的最少数目对应偶图中的最小点覆盖数. 而具有性质“任意两个 1 都不在同一条线上的 1 的最大数目”对应偶图的最大匹配包含的边数. 由哥尼定理, 命题得到证明.

注:

例 矩阵 Q 及其对应的偶图如右图. 其最小覆盖是 $\{x_1, y_2, y_4\}$, 故包含 Q 中所有 1 的线是 Q 的 1 行, 第 2、4 列, 共 3 条.



Example 50. 求证: 在简单连通平面图 G 中, 至少存在一个度数小于或等于 5 的顶点 (10分).

证明. 若不然, $2m = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 6n > 6n - 12 \Rightarrow m > 3n - 6$, 这与 G 是简单连通平面图矛盾. \square

Example 51. 设图 G 有 10 个 4 度顶点和 8 个 5 度顶点, 其余顶点度数均为 7. 求 7 度顶点的最大数量, 使得 G 保持其可平面性 (10分)

Solution. 分两种情况讨论:

(1) 若 G 是非简单图, 则容易知道, 满足条件的 7 度顶点数可以为无穷多;

(2) 若 G 是简单图, 设 7 度顶点的最大数量为 x , 由握手定理得

$$10 \times 4 + 8 \times 5 + 7 \times x = 2m$$

保持可平面性满足 $m \leq 3n - 6$, 解得 $x \leq 16$.

Example 52. 设 G 是具有 n 个顶点, m 条边, p ($p \geq 2$) 个连通分支的平面图, G 的每个面至少由 k ($k \geq 3$) 条边所围成, 则

$$m \leq \frac{k(n-p-1)}{k-2}.$$

Solution. 根据连通性得

$$n - m + \phi = p + 1$$

根据握手定理得

$$2m \geq \phi k$$

整理的

$$m \leq n - p - 1 + \frac{2m}{k}$$

化简即得

$$m \leq \frac{k(n-p-1)}{k-2}.$$

Example 53. 求证: 在 n 阶简单平面图 G 中有 $\phi \leq 2n - 4$, 这里 ϕ 是 G 的面数.

Solution. 对于 n 个点 m 条边的简单连通图有 $m \leq 3n - 6$, 又根据欧拉公式 $n - m + \phi = 2$, 可以推得 $\phi \leq 2n - 4$.

Example 54. 求证: 设 G 是 n 阶的具有 m 条边的简单连通平面图, 则:

$$m \leq 3n - 6.$$

Solution. 由于 G 是 n 阶的具有 m 条边的简单连通平面图, 所以每个面 f 的次数 $\deg(f) \geq 3$. 由 $\sum_{f \in \Phi} \deg(f) = 2m$ 得到: $\phi \leq \frac{2}{3}m$.

由连通平面图的欧拉公式: $n - m + \phi = 2$, 将 $\phi \leq \frac{2}{3}m$ 代入欧拉公式得到 $m \leq 3n - 6$.

Example 55. 设 G 是至少有三个面的简单平面图. 证明: G 的对偶图 G^* 中至少存在三个度数小于 6 的点.

Solution. 由题意知, G^* 是简单平面图, 则每个面 f 的次数 $\deg(f) \geq 3$, 由握手定理得

$$2m \geq 3f$$

整理得 $f \leq 2m/3$.

假设只存在两个度数小于 6 的点, 那么由握手定理得

$$2m \geq 2 + 6(n - 2)$$

整理得 $n \leq m/3 + 5/3$.

根据欧拉公式有

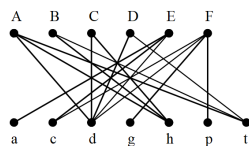
$$2 = n - m + f \leq m/3 + 5/3 - m + 2m/3 = 5/3$$

矛盾, 故结论得证!

13.4 匹配问题

Example 56. 由于在考试中获得好成绩, 6 名学生 A, B, C, D, E, F 将获得下列书籍的奖励, 分别是: 代数学 (a), 微积分 (c), 微分方程 (d), 几何学 (g), 数学史 (h), 规划学 (p), 拓扑学 (t). 每门科目只有 1 本书, 而每名学生对书的喜好是: $A: d, h, t; B: h, t; C: d, h; D: d, t; E: a, c, d; F: c, d, p, g$. 每名学生是否都可以得到他喜欢的书? 为什么? (用图论方法求解)

Solution. 由题意, 得模型图:



问题转化为是否存在饱和 A, B, C, D, E, F 的匹配存在.

取顶点子集合 $S = \{A, B, C, D\}$, 因 $N(S) = \{d, h, t\}$, 所以 $|N(S)| < |S|$, 由霍尔定理知: 不存在饱和 A, B, C, D, E, F 的匹配.

故每名学生不能都得到他喜欢的书.

Example 57. 今有 a, b, c, d, e, f, g 七个人围圆桌开会, 已知: a 会讲英语, b 会讲英语和汉语, c 会讲英语、意大利语和俄语, d 会讲日语和汉语, e 会讲德语和意大利语, f 会讲法语、日语和俄语, g 会讲法语与德语. 给出一种排座方法, 使每个人能够和他身边的人交流 (用图论方法求解).

Solution. 以 7 个人 a, b, c, d, e, f, g 作为图的顶点, 如果两个人说同一种语言, 则对应两个顶点之间有边. 如此得到无向图 G , 寻找 G 的一条哈密顿回路, 从任意一个顶点出发, 确定回路. 比如 $abdfgeca$, 按照这个顺序排座, 每个人都能和他身边的人交谈.

注: 此题将人和语言转换为二部图来做是错误的.

13.5 边着色问题

Example 58. (10 分) 来自亚特兰大, 波士顿, 芝加哥, 丹佛, 路易维尔, 迈阿密, 以及纳什维尔的 7 支垒球队受邀请参加比赛, 其中每支队都被安排与一些其它队比赛 (安排如下所示). 每支队同一天最多进行一场比赛. 建立一个具有最少天数的比赛时间表.

亚特兰大: 波士顿, 芝加哥, 迈阿密, 纳什维尔

波士顿: 亚特兰大, 芝加哥, 纳什维尔

芝加哥: 亚特兰大, 波士顿, 丹佛, 路易维尔

丹佛: 芝加哥, 路易维尔, 迈阿密, 纳什维尔

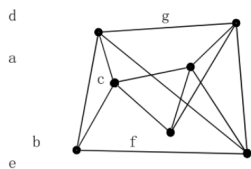
路易维尔: 芝加哥, 丹佛, 迈阿密

迈阿密: 亚特兰大, 丹佛, 路易维尔, 纳什维尔

纳什维尔: 亚特兰大, 波士顿, 丹佛, 迈阿密

Solution. 建立图论模型, a, b, c, d, e, f, g 分别代表亚特兰大, 波士顿, 芝加哥, 丹佛, 路易斯维尔, 迈阿密, 以及纳什维尔 7 支垒球队, 得模型如下

$$\begin{aligned} a &\rightarrow b, c, f, g & b &\rightarrow a, c, g \\ c &\rightarrow a, b, d, e & d &\rightarrow c, e, f, g \\ e &\rightarrow c, d, f & f &\rightarrow a, d, e, g & g &\rightarrow a, b, d, f \end{aligned}$$

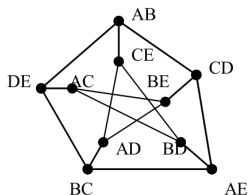


由于 $n = 2 \times 3 + 1$, 即 $k = 3$, 而最大度 $\Delta = 4$, $m = 13 > k\Delta = 12$, 所以边色数 $\chi' = \Delta + 1 = 5$, 完成比赛至少需要 5 天.

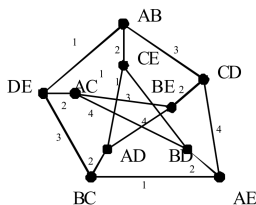
Example 59. 5 个人 A, B, C, D, E 被邀请参加桥牌比赛. 桥牌比赛规则是每一场比赛由两个 2 人组进行对决. 要求每个 2 人组 $\{X, Y\}$ 都要与其它 2 人组 $\{W, Z\}$ ($\{W, Z\} \notin \{X, Y\}$) 进行对决. 若每个人都要与其他任意一个人组成一个 2 人组, 且每个组在同一天不能有多余一场比赛, 则最少安排多少天比赛 (每一天可以有 multiple 场比赛)? 请给出相应的一个时间安排表. (用图论方法求解)

Solution. (1) 建模: 5 个人能够组成 10 个 2 人组: $AB, AC, AD, AE, BD, BC, BE, CD, CE, DE$.

以每个 2 人组作为顶点, 因要求每个 2 人组 $\{X, Y\}$ 都与其它 2 人组 $\{W, Z\}$ 比赛, 所以, 得到比赛状态图如下:



(2) 最少安排多少天比赛转化为求状态图的边色数 χ' . 因为彼得森图不可 1-因子分解, 于是可推出 $\chi' \geq 4$, 又可用 4 种色对其正常边着色 (见下图), 所以: $\chi' \leq 4$. 因此 $\chi' = 4$.



(3) 安排时间表:

第一天: $AB - DE, AE - BC, AC - BE, AD - CE$

第二天: $AB - CE, AC - DE, AE - BD, AD - BC, BE - CD$

第三天: $AB - CD, BC - DE, BD - CE$

第四天: $AC - BD, AD - BE, AE - CD$

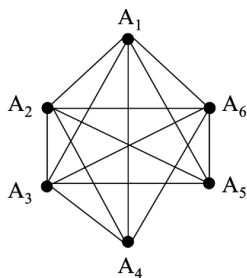
13.6 点着色问题

Example 60. 有 6 名博士生要进行论文答辩，答辩委员会成员分别是

$A_1 =$ 张教授, 李教授, 王教授; $A_2 =$ 赵教授, 李教授, 刘教授; $A_3 =$ 张教授, 王教授, 刘教授;
 $A_4 =$ 赵教授, 王教授, 刘教授; $A_5 =$ 张教授, 李教授, 孙教授; $A_6 =$ 李教授, 王教授, 刘教授.

要使教授们参加答辩会不至于发生时间冲突，至少安排几次答辩时间段？请给出一种最少时间段下的安排.

Solution. 把每个博士生看成一个顶点，如果两个博士生有共同的答辩委员会成员，则在这两个博士对应的顶点间连一条线，如图 G ：



因为一个教授不能同时参加两个博士生的答辩，所以该问题为求解图 G 的点色数.

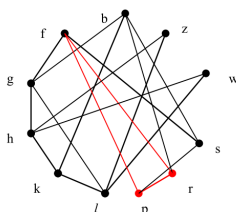
顶点 A_1, A_2, A_3, A_4, A_6 导出的子图为 K_5 ，所以 $\chi(G) \geq 5$.

又因为 A_5 的度数为 4，所以 $\chi(G) = 5$.

其中一种安排如下： $\{A_1\}, \{A_2\}, \{A_3\}, \{A_4, A_5\}, \{A_6\}$

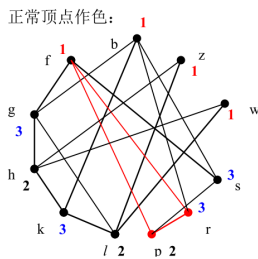
Example 61. 一家公司计划建造一个动物园，他们打算饲养下面这些动物：狒狒 (b)、狐狸 (f)、山羊 (g)、土狼 (h)、非洲大羚羊 (k)、狮子 (l)、豪猪 (p)、兔子 (r)、鼯鼠 (s)、羚羊 (w) 和斑马 (z)。根据经验，动物的饮食习惯为：狒狒喜欢吃山羊、非洲大羚羊 (幼年)、兔子和鼯鼠；狐狸喜欢吃山羊、豪猪、兔子和鼯鼠；土狼喜欢吃山羊、非洲大羚羊、羚羊和斑马；狮子喜欢吃山羊、非洲大羚羊、羚羊和斑马；豪猪喜欢吃鼯鼠和兔子；而其余的则喜欢吃虫子、蚯蚓、草或其它植物。公司将饲养这些动物，希望它们能自由活动但不能相互捕食。求这些动物的一个分组，使得需要的围栏数最少。(要求用图论方法求解)

Solution. 将动物模型为点，两点连线当且仅当两动物相克 (有捕食关系)，根据题目描述，所作图形如下：



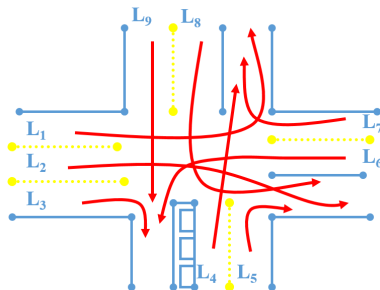
问题转化为求出图的点色数，并用点色数种颜色对其正常点着色.

下面求点色数：一方面，图中存在 K_3 ，所以 $\chi(G) \geq 3$ ，另一方面，我们用 3 种颜色实现了对图的正常顶点着色：

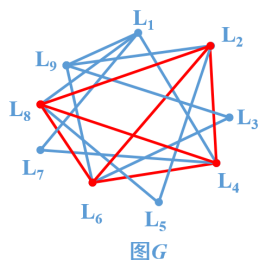


所以, 至少需要 3 个围栏. 给出的一种最少分组方法为: 第一组: 狒狒 (b)、狐狸 (f)、羚羊 (w) 和斑马 (z); 第二组: 土狼 (h)、狮子 (l)、豪猪 (p); 第三组: 山羊 (g)、非洲大羚羊 (k)、兔子 (r)、鬣鬃 (s).

Example 62. 交通灯的相位设置问题: 下图列出了繁华街道路口处的交通车道 L_1, L_2, \dots, L_9 . 在此路口处安置了交通灯. 当交通灯处于某个相位时, 亮绿灯的车道上的车辆就可以安全通过路口. 为了让所有的车辆最终都能够安全通过路口, 对于交通灯来说, 所需要的相位的最小数是多少?



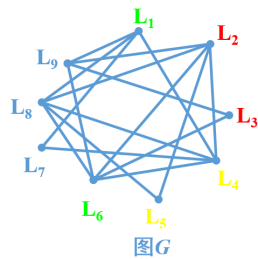
Solution. 车道模型为顶点, 两点连线当且仅当两个车道上的车不能同时安全地进入路口.



问题转化为求 G 的点色数.

一方面, G 中含有 K_4 , 所以点色数至少为 4;

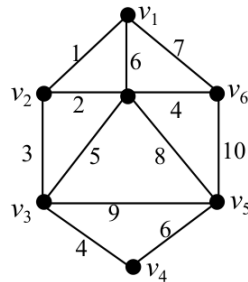
另一方面, 用 4 种色实现了正常点着色.



所以, 最小相位为 4.

13.7 欧拉环游, H 圈问题

Example 63. 在下面边赋权图中求: (1)、每个顶点到点 v_1 的距离 (只需要把距离结果标在相应顶点处, 不需要写出过程); (2)、在该图中求出一棵最小生成树, 并给出最小生成树权值 (不需要中间过程, 用波浪线在图中标出即可); (3)、构造一条最优欧拉环游.

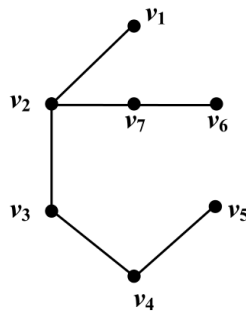


Solution. (1)

$$d(v_1, v_1) = 0, \quad d(v_1, v_2) = 1, \quad d(v_1, v_3) = 4, \quad d(v_1, v_4) = 8$$

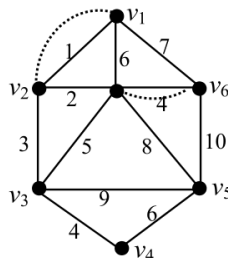
$$d(v_1, v_5) = 11, \quad d(v_1, v_6) = 7, \quad d(v_1, v_7) = 3.$$

(2) 最小生成树为:



最小生成树的权值为 20.

(3) 因为图中有 4 个度数为奇数的顶点: v_1, v_2, v_6, v_7 , 所以至少需添加 2 条边. 在 v_1 与 v_2 , v_6 与 v_7 之间分别添加一条边, 得到欧拉多重图



可以验证在上述欧拉多重图中, 每个圈上新添加的边的总权值没有超过整个圈的权值的一半.

因此上述欧拉多重图的任何一个欧拉回路是原图的最优欧拉环游, 其中一条为

$$v_1 v_2 v_3 v_7 v_5 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_2 v_1 v_7 v_6 v_1$$

Example 64. 在一个赋权完全图中找到一个具有最小权值的哈密尔顿圈，称这种圈为最优哈密尔顿圈。(1)、用边交换技术方法求出图 5 中基于初始圈 $LTP_eP_aN_yM_cL$ 的近似最优哈密尔顿圈；(2)、如何获取最优哈密尔顿圈权值的一个下界？以图 5 为例进行说明。

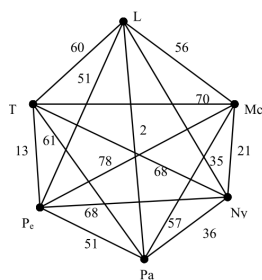
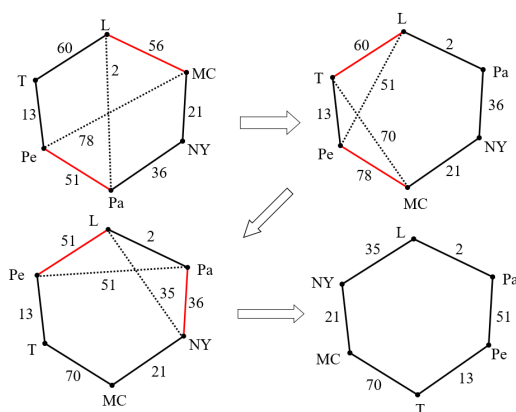


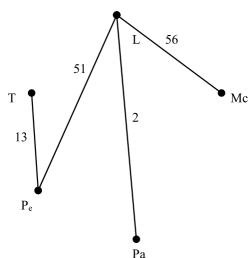
图 5

Solution. (1) 采用边交换技术求解，由此获得的一个近似最优解的权值为 192.



(2) 假设 C 是最优哈密尔顿圈，则对于赋权完全图中任意一点 v ， $C - v$ 必然是 $G - v$ 的一条哈密尔顿路，因此它也是 $G - v$ 的一棵生成树。由此，若 T 是 $G - v$ 的一棵最小生成树，同时 e, f 是 G 中与点 v 相关联的两条边，使得它们的权值之和尽可能小，则 $W(C) \geq W(T) + W(e) + W(f)$ ，即获得最优圈的一个下界。

例如，在图 5 中，取顶点 N_y ，求出 $G - N_y$ 的一棵最小生成树为

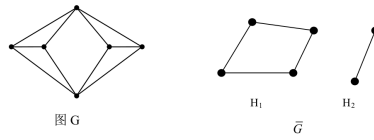


而与 N_y 点相关联的两条权值之和尽可能小的边是 LN_y 与 N_yM_c ，其权值之和为 $35+21 = 56$ 。由此获取最优解的一个下界为 178.

13.8 色多项式

Example 65. 求图 G 的色多项式 $P_k(G)$ (15 分).

Solution. 图 G 的补图如图 \bar{G} ,



则

$$h(H_1, x) = r_1x + r_2x^2 + r_3x^3 + r_4x^4$$

其中, $r_1 = N_1(H_1) = 0, r_2 = N_2(H_1) = 2, r_3 = N_3(H_1) = 4, r_4 = N_4(H_1) = 1,$

$$h(H_2, x) = r_1x + r_2x^2$$

其中, $r_1 = N_1(H_2) = 1, r_2 = N_2(H_2) = 1,$

因此

$$P_k(G) = (x + x^2)(2x^2 + 4x^3 + x^4) = [k]_6 + 5[k]_5 + 6[k]_4 + 2[k]_3.$$

Example 66. 求图 G 的色多项式 $P_k(G)$.

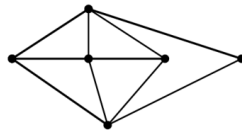
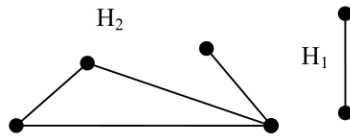


图 G

Solution. 该图的补图 \bar{G} 如下图所示:



它有两个分支, 对于 $h(H_1, x) = x + x^2$, 对于 $H_2: N_4(H_2) = 1, N_3(H_2) = 4, N_2(H_2) = 2, N_1(H_2) = 0,$

$$h(H_2, x) = 2x^2 + 4x^3 + x^4$$

所以

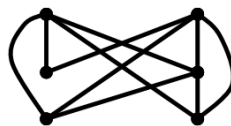
$$\begin{aligned} h(\bar{G}, x) &= (2x^2 + 4x^3 + x^4)(x + x^2) \\ &= 2x^3 + 6x^4 + 5x^5 + x^6 \end{aligned}$$

于是 G 的色多项式

$$\begin{aligned} P_k(G) &= 2[k]_3 + 6[k]_4 + 5[k]_5 + [k]_6 \\ &= k(k-1)(k-2)^2(k^2 - 5k + 8) \end{aligned}$$

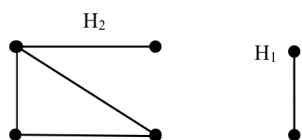
当 $k = 3$ 时, $P_k(G) \neq 0$, 所以 $\chi(G) = 3$.

Example 67. 求下图的 k 色多项式



G

Solution. 它的补图 \overline{G} 如下所示:



接下来的求解和 *Example 66* 一样.

Example 68. 求下图 G 的色多项式 $P_k(G)$.

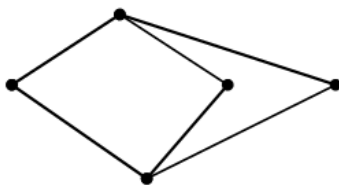
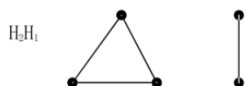


图 G

Solution. 该图的补图 \overline{G} 如下图所示



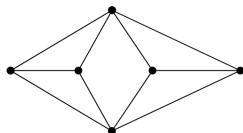
它有两个分支, 对于 H_1 , $h(H_1, x) = x + x^2$, 对于 H_2 , $N_3(G) = 1, N_2(G) = 3, N_1(G) = 1$, $h(H_2, x) = x + 3x^2 + x^3$, 所以

$$\begin{aligned} h(\overline{G}, x) &= (x + 3x^2 + x^3)(x + x^2) \\ &= x^2 + 4x^3 + 4x^4 + x^5 \end{aligned}$$

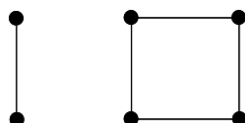
于是 G 的色多项式

$$P_k(G) = [k]_2 + 4[k]_3 + 4[k]_4 + [k]_5$$

Example 69. 求下图 G 的色多项式 $P_k(G)$. 并求出点色数.



Solution. 图 G 的补图 \overline{G} 为



\overline{G} 具有两个连通分支, 分别记为 G_1 和 G_2

G_1 的伴随多项式为 $h_1 = x + x^2$

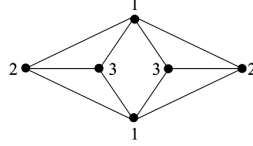
G_2 的伴随多项式为 $h_2 = 2x^2 + 4x^3 + x^4$

所以 \overline{G} 的伴随多项式为 $h = h_1 \times h_2 = 2x^3 + 6x^4 + 5x^5 + x^6$ 因此 G 的色多项式为 $P_k(G) = 2[k]_3 + 6[k]_4 + 5[k]_5 + [k]_6$, 其中 $[k]_i = k(k-1)\cdots(k-i+1)$. 整理得

$$P_k(G) = k(k-1)(k-2)^2(k^2 - 5k + 8) = k^6 - 10k^5 + 41k^4 - 84k^3 + 84k^2 - 32k$$

因为图 G 中包含三角形, 所以 $\chi(G) \geq 3$.

用 3 种颜色可以给出图 G 的一种正常点着色, 如图:



所以 $\chi(G) = 3$.