《应用数学理论与方法》复习

基础与前沿研究院
谭兵

2019 年 6 月 16 日

声明：此复习资料整理自李明奇老师课堂 PPT 和作业习题，我只是搬运工，其中如有书写错误，还请见谅，另，此资料只作复习使用，更多的知识在课堂之外.

——基础与前沿研究院：谭兵

我一直提倡重学习重过程的学习方式. 许多经典的工程应用思想与方法的数学理论并不是那么复杂，但是很巧很有用. 因此，加强对数学内容和方法的理解和扩大知识面，是同学们和我一起要长期修炼的项目.

——李明奇老师

考试内容：

1. 距离空间：掌握几种主要常用距离定义及其用法 15%
2. 特殊函数：Bessel 函数基本性质、Lengendre 多项式展开 10%
3. 变分法：基本典型泛函的极值 20%
4. 图论：1-7 基本算法 30%
5. 优化：1-3 基本算法 20%
6. 组合：5.5-6 递推关系 5%

1 距离空间

1.1 度量空间

常见的距离空间定义和相应的度量空间

1、离散距离空间 X：

$$d(x,y)=\begin{cases}1, x\neq y\\ 0, x=y\end{cases}, x,y\in X$$

2、欧氏空间 R^n ：

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}, x,y\in X$$

3. 有界距离空间 R：

$$d(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|},x,y\in R$$

4、K 阶连续可导函数空间:

$$d(f(x),g(x))=\max_{0\leq j\leq k}\max_{a\leq x\leq b}\left|f^{(j)}(x)-g^{(j)}(x)\right|$$
$$f(x),g(x)\in C^{(k)}|a,b]$$

5、实函数列空间：

$$d(x,y)=d\left(\{x_i\},\{y_i\}\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}$$

Example 1. 证明 $(0,1)$ 区间中的实数是不可数的.

Solution. 反证法，假设 $(0,1)$ 是可数的，则可以将它的元素写成序列形式 $\{r_1,r_2,r_3\cdots\}$，其中

$$r_i=0.a_{i1}a_{i2}a_{i3}\cdots,i=1,2,3,\cdots,a_{ik}=\{0,1,2,3,\cdots,9\}\quad \text{即}0<r_i<1$$

构造一个数 $r=0.b_1b_2b_3\cdots$，其中 $b_i\neq a_{ii}$，于是

$$r\neq r_1,r\neq r_2,r\neq r_3,\cdots$$

所以 $r\notin(0,1)$，产生矛盾，因此 $(0,1)$ 区间中的实数是不可数的.

注：可数集就是与自然数等势的集合.

Example 2. 求证：在欧氏距离下，Q 不完备.

Solution. 令 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\in Q$ 是 Q 中的 *Cauchy* 列，$\lim_{n\to\infty}a_n=e\notin Q$，所以数列在 Q 中不收敛.

注：X 中的任何 *Cauchy* 列都收敛于 X 中的点，则称 X 是完备的.

Example 3. 讨论函数空间 $C^{(1)}[a,b]=\{f(x):f(x)\text{在}[a,b]\text{具有 }1\text{ 阶连续偏导数}\}$ 中基于距离

$$d(f(x),g(x))=\max_{0\leq j\leq 1}\max_{a\leq x\leq b}\left|f^{(j)}(x)-g^{(j)}(x)\right|,f(x),g(x)\in C^{(1)}[a,b]$$

的极限（设 $a=1,b=2$）：（*1*）$\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}$，（*2*）$\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^n$

Solution. *1.*

$$f_n(x)=\frac{1}{x^n}\in C'[1,2]$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}0, & x\in(1,2]\\ 1, & x=1\end{cases}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)\notin C'[1,2]$$

所以 $\lim_{x\to\infty}f_n(x)$ 在距离 d 下不收敛.

2. 因为

$$f_n(x)=\frac{1}{(1+x)^n}$$

假设

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0\quad x\in[1,2]$$

那么，$\forall\varepsilon>0$，欲使 $d(f_n(x),0)<\varepsilon$，即

$$d(f_n(x),0)=\max_{x\in[1,2]}\left\{\frac{1}{(1+x)^n},\frac{n}{(1+x)^{n+1}}\right\}<\varepsilon$$

只要

$$\frac{n}{(1+x)^{n+1}}<\frac{n}{(1+1)^{n+1}}=\frac{n}{2^{n+1}}<\varepsilon$$

由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2^{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^{x+1}\ln 2}=0$$

故，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $M>0$，当 $x>M$ 时，

$$\frac{x}{2^{x+1}}<\varepsilon$$

取 $N=[M]$，则 $n>N$ 时，

$$\frac{n}{2^{n+1}}<\varepsilon$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{(1+x)^n}\overset{d}{=}0.$

Example 4. 离散距离空间 R 中定义距离 $d(x,y)=\begin{cases}1,x\neq y\\0,x=y\end{cases},x,y\in R$，（*1*）叙述极限 $\lim_{n\to+\infty}a_n$ 存在的充要条件，（*2*）求 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Solution. *1.* 极限 $\lim_{n\to+\infty}a_n$ 存在的充要条件是数列 $\{a_n\}$ 只有有限项不同；

2. $\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\}$ 有无限项不同，故不收敛.

1.2 不动点定理

压缩映射原理（容易考大题）： $(\mathbf{X},\mathbf{d})$ 完备，$T:X\to X,d(Tx,Ty)\leqslant kd(x,y),k\in[0,1)$，则 T 存在唯一不动点（$TX=X$ 存在唯一解）.

Example 5. 证明 $x^5+x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内存在唯一解，设计迭代过程，并说明该过程的有效性.

Solution.

$$x=1-x^5,6x=1+5x-x^5,x=\frac{1+5x-x^5}{6}$$

令 $f(x)=\dfrac{1+5x-x^5}{6}$，由微分中值定理有：

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(\xi)|\cdot|x_2-x_1|=\frac{5}{6}|1-\xi^4|\cdot|x_2-x_1|\leq\frac{5}{6}|x_2-x_1|$$

因此 $f(x)$ 为压缩映射函数，那么由压缩映射原理知，存在唯一的 x_0 使得 $f(x_0)=x_0$，即 $x^5+x-1=0$ 在 $(0,1)$ 内存在唯一解 x_0.

构造迭代格式如下：

$$x_n=\varphi(x_{n-1})=\frac{1+5x_{n-1}-x_{n-1}^5}{6}$$

$\varphi'(x)=\frac{5}{6}-\frac{5}{6}x^4<\frac{5}{6}<1$（$x\in(0,1)$），根据不动点迭代法的收敛性知，$x_n=\varphi(x_{n-1})$ 产生的序列 $\{x_n\}$ 必收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点.

Example 6. 用压缩映射原理证明如下线性方程组在 *Jacobi* 方法下存在唯一解：

$$AX+b=X, A=(a_{ij})_{n\times n}, \forall i, \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1$$

Solution. 令 $f(X)=TX=AX+b$，$X\in R^{n\times 1}$，向量 $X\in R^{n\times 1}$ 与 $Y\in R^{n\times 1}$ 之间的距离定义为 $d_\infty(Y,X)=\max_{1\le i\le n}|y_i-x_i|$，则

$$\begin{aligned}
d(TY,TX)=|f(Y)-f(X)|&=\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(y_j-x_j)\right|_{n\times 1}\quad(i=1,2,3,\cdots,n)\\
&\le\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\,|(y_j-x_j)|\\
&\le\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\max_{1\le j\le n}|(y_j-x_j)|\\
&=Cd_\infty(Y,X).
\end{aligned}$$

其中 $C=\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1$，因此 $f(X)$ 是压缩映射，根据压缩映射原理知 $f(X)=X$ 存在唯一解，即 $AX+b=X$ 存在唯一解.

Example 7. 隐函数存在定理：$f(x,y)$ 在 $[a,b]\times(-\infty,+\infty)$ 处处连续，$f_y(x,y)$ 处处存在，若存在常数 $0<m<M<+\infty$，使 $m\le f_y(x,y)\le M$，则存在连续函数 $\varphi(x)$，使 $f(x,\varphi(x))=0, x\in[a,b]$.

证明. 设映射 $T:g(x)\to g(x)-\dfrac{1}{M}f(x,g(x))$，即 $Tg(x)=g(x)-\dfrac{1}{M}f(x,g(x))$

$$\begin{aligned}
d(Tg_2(x),Tg_1(x))&=\max_{x\in[a,b]}|Tg_2(x)-Tg_1(x))|\\
&=\max_{x\in[a,b]}\left|g_2(x)-\frac{1}{M}f(x,g_2(x))-\left(g_1(x)-\frac{1}{M}f(x,g_1(x))\right)\right|\\
&=\max_{x\in[a,b]}\left|g_2(x)-g_1(x)-\frac{1}{M}f_y(x,\xi)\left(g_2(x)-g_1(x)\right)\right|\\
&\le\left|1-\frac{1}{M}f_y(x,\xi)\right|\max_{x\in[a,b]}|(g_2(x)-g_1(x))|\\
&\le\left|1-\frac{m}{M}\right|d\left((g_2(x),g_1(x)\right)\\
&\le\alpha d\left((g_2(x),g_1(x)\right).
\end{aligned}$$

其中 $\alpha=\left|1-\frac{m}{M}\right|\in(0,1)$，那么 T 为压缩映射，根据压缩映射的不动点定理知，存在唯一的 $\varphi(x)$ 使得 $T\varphi(x)=\varphi(x)$，即 $\varphi(x)-\dfrac{1}{M}f(x,\varphi(x))=\varphi(x)$，因此有 $f(x,\varphi(x))=0$. $\square$

2　特殊函数

2.1　Bessel 函数

Bessel 函数及正交函数系（记住如下结论即可）：

n 阶 Bessel 方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-n^2\right)y=0$$

n 阶第一类 Bessel 函数

$$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}$$

Bessel 函数正交函数系

$$V=\left\{J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right):m=1,2,\cdots\right\},J_n\left(\mu_m^{(n)}\right)=0,\mu_m^{(n)}>0$$

具有加权正交性：

$$\int_0^R rJ_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right)dr=\begin{cases}0,(m\neq k)\\ \frac{1}{2}R^2J_{n-1}^2\left(\mu_m^{(n)}\right)=\frac{1}{2}R^2J_{n+1}^2\left(\mu_m^{(n)}\right),m=k\end{cases}$$

2.2　Lengendre 多项式

Legendre 方程

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0.$$

Legendre 多项式展开：

Lengendre 多项式 $P_n(x)$ 满足（下面这个公式不用记）：

$$P_n(x)=\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$$

特别的，当 n 较小时（这个必须记住!!!）：

$$P_0(x)=1,P_1(x)=x,P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right).$$

Legendre 多项式正交性（这个也不需要记）：

$$\int_{-1}^1P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}\dfrac{2}{2n+1}, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$$

3　变分法

3.1　两种问题（需要掌握推导过程）

1、最速降线问题：一质点 m 在重力作用下从 O 点沿一曲线降落至 A 点，问曲线呈何种形状时，质点降落的时间最短.

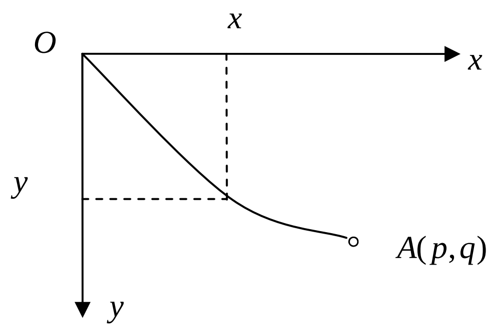


图 1: 最速降线问题模型

设曲线为 $y=y(x)$，则由能量守恒定律可得如下关系：

$$\frac{1}{2}mv^2(x)=mgy(x)$$

那么

$$dt=\frac{ds}{v(x)}=\frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}dx}{\sqrt{2gy(x)}}$$

于是所需的时间为：

$$T=\int_0^p\frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{2gy(x)}}dx$$

最速降线问题：

$$T=\min_{\substack{y(x)\in C^{(2)}[0,p]\\ y(0)=0,y(p)=q}}\int_0^p\frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{2gy(x)}}dx.$$

2、极小旋转曲面问题：在连接平面上 M_1 点和 M_2 点的所有曲线中寻找一条能得到最小旋转曲面面积的曲线.

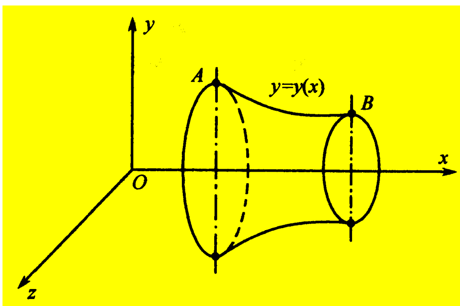


图 2: 极小旋转曲面问题模型

$$M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2),x_1<x_2$$
$$S=\int_{x_1}^{x_2}2\pi y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$$

极小旋转曲面问题：

$$S=\min_{y(x)\in C^{(1)}[x_1,x_2]}\int_{x_1}^{x_2}2\pi y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}dx.$$

3.2 欧拉-拉格朗日方程（简称 E-L 方程）

变分法的关键定理是欧拉-拉格朗日方程，简称 E-L 方程．它对应于泛函的临界点，在寻找函数的极大和极小值时，在一个解附近的微小变化的分析给出一阶的一个近似．它不能分辨是找到了最大值或者最小值或者都不是．E-L 方程只是泛函有极值的必要条件，并不是充分条件．就是说，当泛函有极值时，E-L 方程才成立，在应用中，外界给定的条件可以使得 E-L 方程在大多数情况下满足我们的要求．

Theorem 1. *使最简泛函*

$$J[y(x)] = \int_a^b F\left(x, y, y'\right) dx$$

取极值且满足固定边界条件的极值曲线 $y = y(x)$ 应满足 欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0.$$

3.3 一些例题（必考）

注：求解此类问题时，要先判断泛函是不是有极值，有极值才能用 E-L 方程求解，不能随便直接用！考试时，极值的存在性通常已经肯定，但也最好加一句话说明！

Example 8. 最短距离问题

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}dx$$

Solution. *因为 $F = \sqrt{1+y'^2}$，所以*

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

E-L 方程为

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

则有

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1$$

这里 C_1 是积分常数，即

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

解得

$$y' = \frac{C_1}{\sqrt{1-C_1^2}} = a$$

所以

$$y = ax + b$$

由 $y\left(x_0\right) = y_0, y\left(x_1\right) = y_1$，可得

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right) + y_1.$$

Example 9. **最速降线问题**

$$J[y(x)]=\int_0^p\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx$$

且

$$y(0)=0,y(p)=q$$

Solution.

$$F\left(x,y,y'\right)=F\left(y,y'\right)=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$$

其 *E-L* 方程为

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

代入化简为

$$\frac{2y'}{1+\left(y'\right)^2}=\frac{-1}{y}$$

即

$$\ln\left(1+\left(y'\right)^2\right)=-\ln y+\ln 2r$$
$$y\left(1+y'^2\right)=2r$$

引入变量代换 $x=x(\theta)$，并设

$$y'=\cot\frac{\theta}{2}$$

代入上式得

$$y=2r\sin^2\frac{\theta}{2}=r(1-\cos\theta)$$

上式对 θ 求导，得

$$y'\frac{dx}{d\theta}=r\sin\theta$$

即

$$\cot\frac{\theta}{2}\frac{dx}{d\theta}=r\sin\theta$$
$$\frac{dx}{d\theta}=2r\sin^2\frac{\theta}{2}=r(1-\cos\theta)$$

所以

$$x=r(\theta-\sin\theta)+x_0$$

根据 $y(0)=0,y(p)=q$ 求出 $x_0=0$ ，这样，所求曲线为

$$\begin{cases}x=r(\theta-\sin\theta)\\y=r(1-\cos\theta)\end{cases}.$$

Example 10. **极小旋转曲面问题**

$$S[y(x)]=2\pi\int_{x_1}^{x_2}y(x)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx$$

Solution. 解法一:

$$F\left(x, y(x), y'(x)\right) = y(x)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}$$

E-L 方程化简为（老老实实求导化简可得）

$$1 + \left(y'\right)^2 = y\left(y''\right)$$

即

$$\frac{1}{y} = \frac{y''}{1 + (y')^2} \tag{1}$$

又

$$y'' = \frac{d\left((y')^2\right)}{2dy} = \frac{d\left((y')^2\right)}{2dx \times \frac{dy}{dx}} = \frac{y'\left(y''\right)}{y'} \quad \text{注: 第二个等号表示推导过程}$$

代入(1)可得

$$\frac{2dy}{y} = \frac{d\left(y'\right)^2}{1 + (y')^2}$$

那么

$$2\ln y = \ln k^2\left(1 + \left(y'\right)^2\right)$$

$$y = k\sqrt{1 + \left(y'\right)^2}$$

令

$$y' = \mathrm{sh}(t), \text{得} y = k\,\mathrm{ch}(t)$$

则

$$dx = \frac{1}{y'}dy = \frac{ksh(t)dt}{sh(t)} = kdt$$

$$x = kt + c$$

因此，得到旋轮线

$$\begin{cases} x = kt + c \\ y = k\,\mathrm{ch}(t) \end{cases}$$

其中

$$\mathrm{sh}(t) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \mathrm{ch}(t) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Solution. 解法二:

注意到 $F\left(x, y(x), y'(x)\right) = y(x)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}$ 不含 x，故 E-L 方程两边同乘 dy,

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} \Rightarrow F - y'F_{y'} = C_1$$

则

$$F - y'F_{y'} = y\sqrt{1 + (y')^2} - y' \cdot y\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C_1$$

化简得

$$y(1 + (y')^2) - y(y')^2 = C_1\sqrt{1 + (y')^2}$$

即

$$y = C_1\sqrt{1 + (y')^2}$$

令 $y' = sh(t)$，后续步骤同解法一.

Example 11. 求极值问题

$$J[y(x)]=\int_1^2\frac{\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}}{x}dx, M_1(1,0), M_2(2,1)$$

Solution. *E-L* 方程化简为

$$\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{\left(y'\right)^2+1}=c_1$$

$$y'=\pm\frac{c_1x}{\sqrt{1-\left(c_1x\right)^2}}$$

$$y=\mp\frac{1}{c_1}\sqrt{1-\left(c_1x\right)^2}+c_2$$

将 $M_1(1,0), M_2(2,1)$ 代入得

$$\begin{cases}0=-\dfrac{1}{c_1}\sqrt{1-\left(c_1\right)^2}+c_2\\1=-\dfrac{1}{c_1}\sqrt{1-4\left(c_1\right)^2}+c_2\end{cases}$$

解得 $c_1=\dfrac{\sqrt{5}}{5}, c_2=2$，于是

$$x^2+(y-2)^2=5.$$

Example 12. 求极值曲线

$$J[y(x)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(y'(x)\right)^2-y^2\right)dx, M_1(0,0), M_2(\frac{\pi}{2},1)$$

Solution. *E-L* 方程化简为

$$y''+y=0$$

通解表达式为

$$y=a\cos x+b\sin x$$

利用边界条件得 $a=0, b=1$，故极值曲线为

$$y=\sin x.$$

Example 13. 求极值曲线：

$$J[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}\left(y'(x)+x^2\left(y'(x)\right)^2\right)dx, M_1\left(x_1,y_1\right), M_2\left(x_2,y_2\right)$$

若 $M_1(1,1), M_2(2,2)$，求出泛函极值.

Solution. 解法一：$F=y'+x^2y'^2$，欧拉方程为

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0-\frac{d}{dx}\left(1+2x^2y'\right)=0$$

即

$$\frac{d}{dx}\left(1+2x^2y'\right)=4xy'+2x^2y''=0$$

从上式约去 $2x$，得

$$xy''+2y'=0$$

将上式积分

$$\int \frac{y''}{y'}dx+\int \frac{2}{x}dx=0$$

即

$$\ln y'+\ln x^2=\ln c_1$$

再积分得

$$y=-\frac{c_1}{x}+c_2$$

将边界条件代入上式得

$$y=-\frac{2}{x}+3.$$

因此，

$$J[y(x)]=3.$$

Solution. 解法二：由于 $F_y=0$，根据欧拉公式 $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0-\frac{d}{dx}\left(1+2x^2y'\right)=0$，那么 $F_{y'}=\left(1+2x^2y'\right)=C$，一步到位 $y=-\frac{c_1}{x}+c_2$.

3.4 多维变分问题

Theorem 2. 使最简泛函

$$J[y(x),z(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F\left(x,y(x),y'(x),z(x),z'(x)\right)dx$$

取极值且满足固定边界条件 $y\left(x_0\right)=y_0,y\left(x_1\right)=y_1,z\left(x_0\right)=z_0,z\left(x_1\right)=z_1$ 的极值曲线 $y=y(x),z=z(x)$ 应满足方程组

$$\left\{\begin{array}{l} F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0 \\ F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}=0 \end{array}\right. .$$

Example 14. 求泛函

$$J[y,z]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2yz+y'^2+z'^2\right)dx$$

满足边界条件 $y(0)=0,y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,z(0)=0,z\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ 的极值曲线.

Solution. $F=2yz+y'^2+z^2$，

$$y''-z=0,z''-y=0$$

解此二阶线性微分方程组，将上面前一个方程求导两次，消去 z''，得

$$y^{(4)}-y=0$$

同理可得

$$z^{(4)}-z=0$$

其通解为

$$\begin{cases} y = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x \\ z = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x \end{cases}$$

再利用边界条件

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0, c_4 = 1.$$

Example 15. 证明：

$$F_x - \frac{d}{dx}(F - y' F_{y'}) = 0$$

证明. E-L 方程为：

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0.$$

应用分部积分法得

$$\frac{d}{dx}(F) = F_x + F_y y' + F_{y'} y''$$

$$\frac{d}{dx}(y' F_{y'}) = y'' F_{y'} + y' \frac{d}{dx}(F_{y'}) = y'' F_{y'} + y' F_y$$

代入可得

$$F_x - \frac{d}{dx}(F - y' F_{y'}) = 0.$$

□

注：如果 F 不直接含 x，即 $F_x = 0$，那么 $F - y' F_{y'} = C$.

3.5 总结

E-L 方程：

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

以下两个技巧可节约计算量

(1) 当 $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ 时，不用计算 $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$，由于 $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$，那么 $\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = C$；

(2) 当 F 不直接含变量 x 时，E-L 方程两边同乘 dy，得到 $F - y' F_{y'} = C$，此时可大大减少计算量.

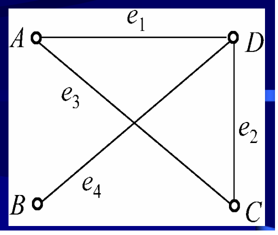
注：应用技巧 (2) 求解最速降线问题，你会收获惊喜！

4 图论

图的矩阵表示：**关联矩阵** $M(G) = [m_{ij}]$ 是一个 $n \times m$ 矩阵，其中 m_{ij} 为点 v_i 与边 e_j 关联的次数，有环的边计算两次；**邻接矩阵** $A(G) = [a_{ij}]$ 是一个 n 阶方阵，其中 a_{ij} 是连接 v_i 与 v_j 的边的数目.

例 设G如图所示,则

$$M(G)=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix},\ A(G)=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$



4.1 Dijkstra 算法 (最短路算法)

问题描述：给定简单权图 $G=(V,E)$ ，并设 G 有 n 个顶点，求 G 中点 u_0 到其它各点的距离.

Dijkstra 算法（算法流程需要掌握，有可能会让写这个，就算不让写这个，算法流程也得掌握，不然让求最短距离没法做）

(1) 置 $l(u_0)=0$ ；对所有 $v\in V\backslash\{u_0\}$ ，令 $l(v)=\infty$；$S_0=\{u_0\}$ ，$i=0$.

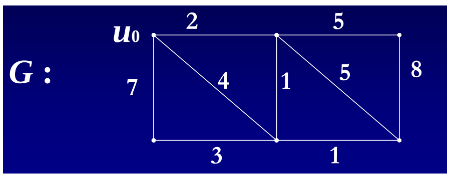
(2) 若 $i=n-1$，则停，否则令 $\overline{S_i}=V\backslash S_i$，转 (3).

(3) 对每个 $v\in\overline{S_i}$，令 $l(v)=\min\{l(v),l(u_i)+w(u_iv)\}$，计算 $\min_{v\in\overline{S}_i}\{l(v)\}$ ，并用 u_{i+1} 记达到最小值的某点. 置 $S_{i+1}=S_i\cup\{u_{i+1}\}$，$i=i+1$，转 (2).

终止后，u_0 到 v 的距离由 $l(v)$ 的终值给出.

Dijkstra 算法基本原理：Dijkstra 算法是从一个顶点到其余各顶点的最短路径算法，解决的是有向图中最短路径问题. 每次新扩展一个距离最短的点，更新与其相邻的点的距离. 当所有边权都为正时，由于不会存在一个距离更短的没扩展过的点，所以这个点的距离永远不会改变，因而保证了算法的正确性. 不过根据这个原理，用 Dijkstra 求最短路的图不能有负权边，因为扩展到负权边的时候会产生更短的距离，有可能就破坏了已经更新的点距离不会改变的性质.

Example 16. 求图 G 中 u_0 到其它点的距离.



Solution. *1.* 初始标记，除 u_0 外，所有点的距离设为 ∞；

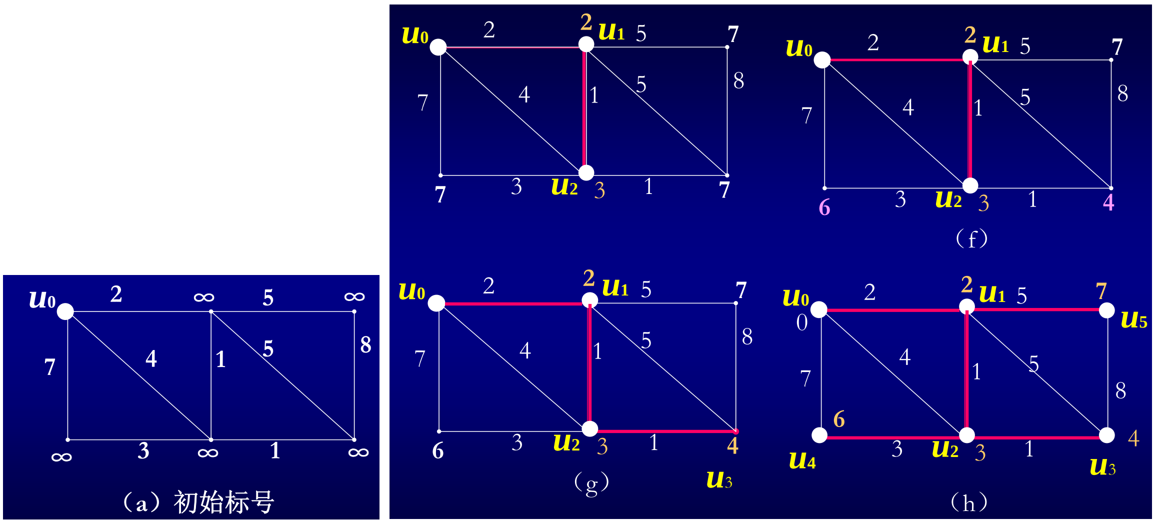
2. 用与 u_0 关联的边的权 $2,4,7$ 分别更新与 u_0 相邻的三个点的标号；

3. 取最小者得标号 u_1；

4. 对于 u_1 相邻的，用 $l(u_1)+w(u_1v)=2+1=3$ 更新距离 4，得标号 u_2，更新与 u_1 相邻的两个 ∞；

5. 依次进行下去.

求解过程如下



Example 17. 从 u_0 到 u_{k+1} 的路中存在点不在 S' 内，其长度一定大于 $l\,(u_{k+1})$.

Solution. 若存在除 u_{k+1} 外至少一个其他顶点 q_1 的最短通路为 $u_0u_1u_2\cdots u_aq_1q_2\cdots q_bu_{k+1}$，

$$\text{通路}u_0u_1u_2\cdots u_aq_1q_2\cdots q_bu_{k+1}\text{长度} \geq L(q_1) + \text{通路}q_1q_2\cdots q_bu_{k+1}\text{长度}$$

所以

$$L(q_1) + \text{通路}q_1q_2\cdots q_bu_{k+1}\text{长度} > L(u_{k+1})$$

因而通路 $u_0u_1u_2\cdots u_aq_1q_2\cdots q_bu_{k+1}$ 不是由 u_0 到 u_{k+1} 的最短通路，与假设矛盾.

Example 18. 简述求解人狼羊菜渡河问题的基本思路.

Solution. 将人狼羊菜依次用一个四维向量表示，当人或物在初始点时相对应分量取 1，而在对岸时则取 0. 人不在场时，狼吃羊，羊吃菜，因此，人不在场时，不能将狼与羊，羊与菜留在任意一处. 通过穷举法可列出所有可行状态如下：

$$\begin{aligned}&(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),\\&(1,0,1,0),(0,1,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0),\\&(0,0,0,1),(0,0,0,0)\end{aligned}$$

其中第一种为初始状态，最后一种为渡河结束.

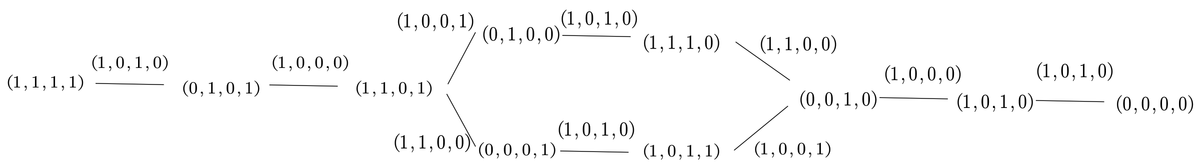
用 1 表示过河，0 表示未过河，如 $(1,1,0,0)$ 表示人带狼过河. 由题意可知有 4 种情况. 转移向量如下：

$$(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1).$$

规定状态向量和转移向量之间运算为

$$0+0=0, 1+0=1, 0+1=1, 1+1=0.$$

安全过河表示如下



由此可得到两种过河方式.

注：

$$(1,1,1,1) \xrightarrow{(1,0,1,0)} (0,1,0,1)$$

初始状态 $(1,1,1,1)$ 表示人狼羊菜都在初始点，转移状态 $(1,0,1,0)$ 表示人将羊带到河对岸，结果状态 $(0,1,0,1)$ 表示人和羊到河对岸去了.

4.2 最小生成树

Definition 1. 在权图 G 中，边权之和最小的生成树称为 G 的最优树 .

破圈法（求最优树的方法）：

1. 将 G 的边按权从小到大排列，不妨设为

$$e_1, e_2, \ldots, e_m$$

2. 取 $T=\{e_1\}$ ，再从 e_2 开始依次将排好序的边加入到 T 中，使加入后由 T 导出的子图（即由 T 作为边集，T 中的边相关联的点作为点集所确定的子图）不含圈，直至 T 中含有 $n-1$ 条边.

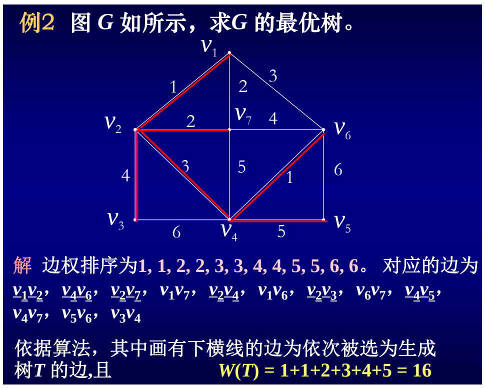
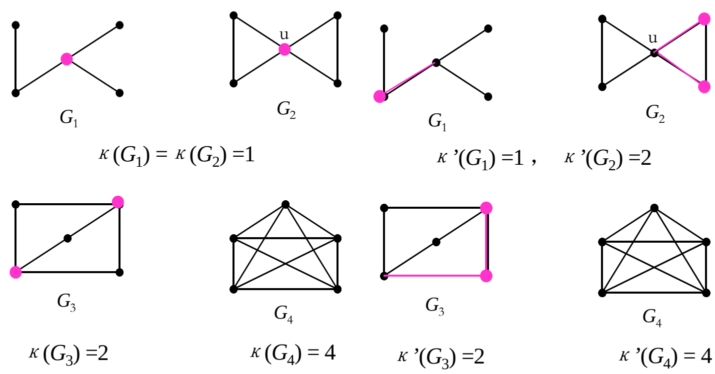
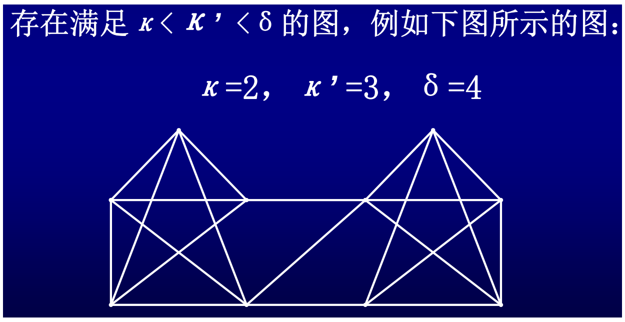


图 3: $\Delta=5, \delta=2, W=42, \omega=1, \chi=3, \chi'=5, k=2, k'=2$.

4.3 连通度



任意的图均满足：$K \leqslant K' \leqslant \delta$（点连通度小于等于边连通度小于等于最小度）



4.4 Euler 图和哈密尔顿图

Definition 2. 设 G 是无孤立点的图. 经过 G 中每条边一次且仅一次的通路（回路）称为欧拉通路（回路），存在欧拉回路的图称为欧拉图 .

Theorem 3. 连通图 G 是欧拉图当且仅当 G 不含度为奇数的点; 连通图 G 有欧拉通路但无欧拉回路，当且仅当 G 中恰有两个度为奇数的点.

Definition 3. 经过图中每个点一次且仅一次的路（回路）称为哈密尔顿路（回路或圈），存在哈密尔顿圈的图称为哈密尔顿图.

求偶图的最大匹配的方法，称为匈牙利算法 (需要掌握，有可能会写算法思想).

匈牙利算法算法思想：先任取一个匹配 M，然后从 V_1 的每个非饱和点出发寻找 M 可扩路（起点与终点均为 M 非饱和点的 M 交替路为 M 可扩路）. 若不存在 M 可扩路，则 M 为最大匹配; 若存在，则将可扩路中 M 与非 M 的边互换，得到一个比 M 多一条边的匹配 M'，再对 M' 重复上面过程.

4.5 边着色

对任意的偶图 G，$\chi'(G) = \Delta(G)$.

若 G 是简单图，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$或$\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

设 G 是非空的简单图. 若 G 中恰有一个度为 $\Delta(G)$ 的点，或 G 中恰有两个度为 $\Delta(G)$ 的点并且这两个点相邻，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$.

若 n 阶简单图 G，$n = 2k + 1$，边数 $m > k\Delta$，则 $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Example 19. 简述高校教务科排课的基本图论算法

Solution. 设有 m 位教师 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 和 n 个班级 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，教师 x_i 需要给 y_j 上 k_{ij} 课（例如，x_1 需要给 y_1, y_3, y_5 上课）. 则在 x_i 与 y_j 间连 k_{ij} 条边，得偶图 G，这样，一个课时 *1-1* 对应 G 中的一个匹配，而一个匹配又一一对应一种正常边着色的着同色的一组边.

因偶图的边色数为最大度 $\Delta(G)$,所以排课表问题可归纳为:对给定的偶图 $G = (V_1, V_2.E)$，如何对 G 用 $\Delta(G)$ 种色进行正常边着色，求解方法如下:

(1) 假定 $|V_1| \geq |V_2|$，加点扩充 V_2 为 V_2^*，使 $|V_2^*| = V_1$.

(2) 找出 V_1 中最小度点与 V_2^* 中最小度点，然后连成边，如此直至各点的度均等于 $\Delta(G)$，记所得之图为 G^*，那么 G^* 存在完美匹配.

(3) 用匈牙利算法找出 G^* 的一个完美匹配 M_1，再找 $G^* - M_1$ 的完美匹配 M_2，如此继续可求得 G^* 的一组互不相交的完美匹配 $M_1, M_2, \cdots, M_\Delta$.

(4) 取 $M_1, M_2, \cdots, M_\Delta$ 中原来图的边即为所求.

4.6 点着色

对任意的图 G 均有：$\chi \leqslant \Delta + 1$.

设 G 是连通图. 假定 G 既不是完全图又不是奇圈，则 $\chi \leqslant \Delta$.

符号解释：$M(G)$：关联矩阵，$A(G)$：邻接矩阵，$W(G)$：权重和，$\Delta(G)$：最大度，$\delta(G)$：最小度，$\omega(G)$：连通分支数，$\chi(G)$: 最小点色数，$\chi'(G)$: 最小边色数，$k(G)$：最小点连通度，$k'(G)$：最小边连通度.

5 最优化方法

5.1 一维搜索算法

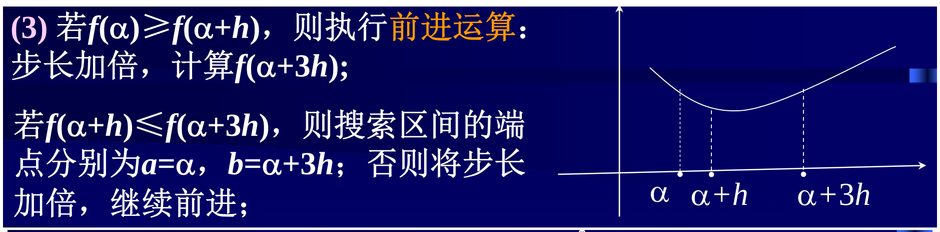
5.1.1 成功-失败法（效率低，但求搜索区间较有效）

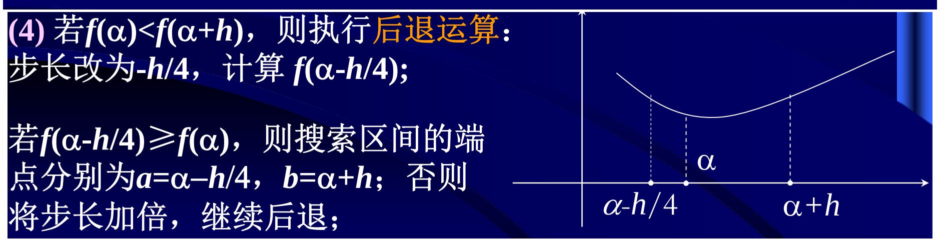
基本思想：对 $f(x)$ 任选一个初始点及初始步长，确定第二点，通过比较这两点函数值的大小，确定第三点位置，比较这三点的函数值大小，确定是否为“高—低—高”形态.

成功-失败法基本步骤（大步前进，小步后退）：

(1) 选择一个初始点 α 和一个初始步长 h ；

(2) 计算并比较 $f(\alpha)$ 和 $f(\alpha + h)$；





5.1.2 0.618 法（黄金分割法）

基本思想：通过取试探点使包含极小点的区间不断缩短，当区间长度小到一定程度时，区间上各点的函数值均接近极小值，因此任意一点都可以作为极小点的近似.

0.618 法基本步骤：

(1) 置初始区间 $[a_1, b_1]$ 及精度要求 $\varepsilon > 0$，计算试探点

$$\lambda_1 = a_1 + 0.382\,(b_1 - a_1)\,, \quad \mu_1 = a_1 + 0.618\,(b_1 - a_1)$$

计算函数值 $f(\lambda_1)$ 和 $f(\mu_1)$．令 $k = 1$ ．

(2) 若 $b_k - a_k < \varepsilon$ ，则停止计算；否则当 $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$ 时，转 (3) ；当 $f(\lambda_k) \le f(\mu_k)$ 时，转 (4) ．

(3) 置 $a_{k+1} = \lambda_k, b_{k+1} = b_k, \lambda_{k+1} = \mu_k$（**哪边大去哪边**），$\mu_{k+1} = a_{k+1} + 0.618\,(b_{k+1} - a_{k+1})$，计算 $f(\mu_{k+1})$，转 (5).

(4) 置 $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = \mu_k, \mu_{k+1} = \lambda_k$（**哪边大去哪边**），$\lambda_{k+1} = a_{k+1} + 0.382\,(b_{k+1} - a_{k+1})$，计算 $f(\lambda_{k+1})$，转 (5).

(5) 置 $k = k + 1$，转 (2).

5.1.3 Fibonacci 法

此法与 0.618 法的主要差别为：区间长度的缩短比率不是常数，而是由 Fibonacci 数确定；给出精度后，迭代次数可预先确定；适合于参数只能取整数值的情况.

Fibonacci 法基本步骤：

(1) 置初始区间 $[a_1, b_1]$ 及精度要求 $\varepsilon > 0$，求迭代次数，使得

$$F_n \ge \frac{b_1 - a_1}{\varepsilon}$$

置辨别常数 $\delta > 0$，计算试探点

$$\lambda_1 = a_1 + \frac{F_{n-2}}{F_n}\,(b_1 - a_1)\,, \quad \mu_1 = a_1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}\,(b_1 - a_1)$$

计算 $f(\lambda_1)$ 和 $f(\mu_1)$，令 $k = 1$.

(2) 当 $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$ 时，转 (3) ；当 $f(\lambda_k) \le f(\mu_k)$ 时，转 (4) .

(3) 置 $a_{k+1} = \lambda_k, b_{k+1} = b_k, \lambda_{k+1} = \mu_k$，

$$\mu_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}\,(b_{k+1} - a_{k+1})$$

若 $k = n - 2$，转 (6)，否则计算 $f(\mu_{k+1})$，转 (5).

(4) 置 $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = \mu_k, \mu_{k+1} = \lambda_k$，

$$\lambda_{k+1} = a_{k+1} + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}\,(b_{k+1} - a_{k+1})$$

若 $k = n - 2$，转 (6)，否则计算 $f(\lambda_{k+1})$，转 (5).

(5) 置 $k = k + 1$，转 (2).

(6) 令 $\lambda_n=\lambda_{n-1}$， $\mu_n=\lambda_{n-1}+\delta$，计算 $f(\lambda_n)$ 和 $f(\mu_n)$，

若 $f(\lambda_n)>f(\mu_n)$，则令 $a_n=\lambda_n, b_n=b_{n-1}$；

若 $f(\lambda_n)\le f(\mu_n)$，则令 $a_n=a_{n-1}, b_n=\mu_n$；

停止计算，则极小点含于 $[a_n,b_n]$.

Example 20. 仿照斐波那契法构造一个新算法

Solution. 在斐波那契数列中加入两个参数，如下

$$F_0=F_1=1; F_n=\alpha F_{n-1}+\beta F_{n-2}$$

迭代公式可以表示为：

$$\mu_{k+1}=a_{k+1}+\alpha\frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}\left(b_{k+1}-a_{k+1}\right)$$
$$\lambda_{k+1}=a_{k+1}+\beta\frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}\left(b_{k+1}-a_{k+1}\right).$$

5.2 无约束最优化方法

5.2.1 最速下降算法

最速下降算法：希望从某一点出发，选择一个目标函数值下降最快的方向，沿此方向搜索以期尽快达到极小点.

最速下降法基本步骤：

(1) 给定初点 $X^{(1)}\in R^n$，允许误差 $\varepsilon>0$，置 $k=1$；

(2) 计算搜索方向 $d^{(k)}=-\nabla f\left(X^{(k)}\right)$；

(3) 若 $\left\|d^{(k)}\right\|\le\varepsilon$，则停止计算；否则，从 $X^{(k)}$ 出发，沿 $d^{(k)}$ 进行一维搜索，求 λ_k 满足

$$f\left(X^{(k)}+\lambda_k d^{(k)}\right)=\min_{\lambda\ge 0} f\left(X^{(k)}+\lambda d^{(k)}\right)$$

(4) 令 $X^{(k+1)}=X^{(k)}+\lambda_k d^{(k)}$，置 $k=k+1$，返回 (2).

最速下降法特点： 若 $f(x)$ 为凸函数，则应用最速下降算法可以在有限步迭代后达到最小点. 过程一般呈锯齿形，开始快，其后慢，属于线性收敛.

5.2.2 牛顿法（定步长）

最速下降法是以函数的一次近似为基础而提出的算法，牛顿法是以函数的二次近似为基础提出的算法，一般来说二次近似比一次近似更精确.

基本思想：用一个二次函数去近似目标函数 $f(X)$ ，然后精确地求出这个二次函数的极小点.

$$\begin{aligned}f(X)\approx&\phi(X)=f\left(X^{(k)}\right)+\nabla f\left(X^{(k)}\right)^T\left(X-X^{(k)}\right)\\&+\frac{1}{2}\left(X-X^{(k)}\right)^T\nabla^2 f\left(X^{(k)}\right)\left(X-X^{(k)}\right)\end{aligned}$$

求导令为零，得牛顿计算法的公式

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}-\nabla^2 f\left(X^{(k)}\right)^{-1}\nabla f\left(X^{(k)}\right)$$

一维牛顿法是：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f'\left(x_k\right)}{f''\left(x_k\right)},\quad k=0,1,\cdots$$

牛顿法基本步骤：

(1) 给定初点 $X^{(1)}\in R^n$，允许误差 $\varepsilon>0$，置 $k=1$；

(2) 若 $\left\|\nabla f\left(X^{(k)}\right)\right\|\leq\varepsilon$，停止，得解 $X^{(k)}$，否则令

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}-\nabla^2 f\left(X^{(k)}\right)^{-1}\nabla f\left(X^{(k)}\right),\quad k=k+1$$

转 (1).

牛顿法优点

1. 牛顿法产生的点列 $\{X^{(k)}\}$ 若收敛，则收敛速度快，具有至少二阶收敛速率.
2. 牛顿法具有二次终止性 (对于二次函数，一步到位).

牛顿法缺点

1. 当初始点远离极小点时，牛顿法产生的点列可能不收敛，原因之一，牛顿方向不一定是下降方向.
2. 可能会出现在某步迭代时，目标函数值上升.
3. 需要计算海塞矩阵的逆矩阵，计算量大.

为此，人们对牛顿法进行修正，提出了**阻尼牛顿法**.

5.2.3 阻尼牛顿法

基本思想: 与牛顿法相比，**阻尼牛顿法增加了沿牛顿方向的一维搜索**，寻找最优的步长因子 λ_k，其迭代公式是

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}+\lambda_k d^{(k)}$$

其中 $d^{(k)}=-\nabla^2 f\left(X^{(k)}\right)^{-1}\nabla f\left(X^{(k)}\right)$ 为牛顿方向，λ_k 是由一维搜索所得的步长，即满足 $f\left(X^{(k)}+\lambda_k d^{(k)}\right)=\min_\lambda f\left(X^{(k)}+\lambda d^{(k)}\right)$.

阻尼牛顿算法基本步骤：

(1) 给定初点 $X^{(1)}\in R^n$，允许误差 $\varepsilon>0$，置 $k=1$；

(2) 若 $\left\|\nabla f\left(X^{(k)}\right)\right\|\leq\varepsilon$，$X^*=X^{(k)}$，停止；否则令

$$d^{(k)}=-\nabla^2 f\left(X^{(k)}\right)^{-1}\nabla f\left(X^{(k)}\right)$$

(3) 从 $X^{(k)}$ 出发，沿方向 $d^{(k)}$ 作一维搜索：

$$\min_{\lambda} f\left(X^{(k)}+\lambda d^{(k)}\right)=f\left(X^{(k)}+\lambda_k d^{(k)}\right)$$

(4) 令 $X^{(k+1)}=X^{(k)}+\lambda_k d^{(k)}$，置 $k=k+1$，转 (2).

牛顿法和阻尼牛顿法虽然不同，但有共同缺点．一是可能出现**海塞矩阵奇异**的情形，因此不能确定后继点；二是即使海塞矩阵非奇异，也未必正定，因而**牛顿方向不一定是下降方向**，可能会导致算法失效.

实际应用时可将最速下降法与牛顿法结合运用，开始用最速下降法，其后用牛顿法.

为了克服牛顿法的缺点，人们提出了**拟牛顿法**.

5.2.4 拟牛顿法

拟牛顿法基本思想：用不含二阶导数的矩阵近似牛顿法中的海塞矩阵的逆矩阵.

常见的拟牛顿算法有 DFP，BFGS 算法.

5.2.5 共轭梯度法

最速下降法开始几步收敛快，其后越来越慢，在 x^*（最优点）附件牛顿法虽快，但要计算 $[\nabla^2 f(x)]^{-1}$，计算量与存储量都较大．我们希望找到一种算法，其收敛速度介于最速下降法与牛顿法之间，又不需计算 $[\nabla^2 f(x)]^{-1}$，对于二次函数只需迭代有限步，而共轭梯度法正是满足上述要求的算法之一.

Fletcher-Reeves 共轭梯度法基本步骤：

(1) 给定初始点 $X^{(1)}\in R^n$，允许误差 $\varepsilon>0$，置 $d^{(1)}=-\nabla f\left(X^{(1)}\right)$，$k=1$；

(2) 若 $\left\|\nabla f\left(X^{(k)}\right)\right\|\leq\varepsilon$，则停止计算，$X^*=X^{(k)}$；否则作一维搜索，求 λ_k 满足

$$f\left(X^{(k)}+\lambda_k d^{(k)}\right)=\min_{\lambda} f\left(X^{(k)}+\lambda d^{(k)}\right)$$

令 $X^{(k+1)}=X^{(k)}+\lambda_k d^{(k)}$，计算 $\nabla f\left(X^{(k+1)}\right)$；

(3) 若 $k<n$，则转 (4)，否则转 (5)；

(4) 令 $d^{(k+1)}=-g^{(k+1)}+\beta_k d^{(k)}$,其中 $\beta_k=\frac{\left\|g^{(k+1)}\right\|^2}{\left\|g^{(k)}\right\|^2}$,置 $k=k+1$,转 (2),其中 $g^{(k)}=\nabla f\left(X^{(k)}\right)$;

(5) 令 $X^{(1)}=X^{(k+1)}$，$d^{(1)}=-\nabla f\left(X^{(k+1)}\right)$，$k=1$，返回 (2).

Example 21. *描述一维牛顿算法和二维牛顿算法.*

Solution. *1. 牛顿法是一种函数逼近法，基本思想是：在极小点附近用函数的二阶泰勒多项式近似代替目标函数，从而求得目标函数的极小点的近似值.*

对 $f(x)$ 在 x^k 点二阶泰勒展开

$$q(x)\approx f(x^{(k)})+f'(x^{(k)})\left(x-x^{(k)}\right)+\frac{1}{2}f''(x^{(k)})\left(x-x^{(k)}\right)^2$$

$q(x)$ 可以认为是 $f(x)$ 的近似．因此，求函数 f 的极小值点近似于求解 q 的极小值点，函数 q 应该满足一阶必要条件：

$$0=q'(x)=f'(x^{(k)})+f''(x^{(k)})\left(x-x^{(k)}\right)$$

令 $x=x^{(k+1)}$，可得牛顿迭代法的公式：

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\frac{f'\left(x^{(k)}\right)}{f''\left(x^{(k)}\right)}.$$

2. 对 $f(x,y)$ 二维泰勒展开得

$$\begin{aligned}f(x,y)\approx\ & f\left(x_k,y_k\right)+\frac{\partial f\left(x_k,y_k\right)}{\partial x}\left(x-x_k\right)+\frac{\partial f\left(x_k,y_k\right)}{\partial y}\left(y-y_k\right)\\&+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f\left(x_k,y_k\right)}{\partial x^2}\left(x-x_k\right)^2+2\frac{\partial^2 f\left(x_k,y_k\right)}{\partial x\partial y}\left(x-x_k\right)\left(y-y_k\right)+\frac{\partial^2 f\left(x_k,y_k\right)}{\partial y^2}\left(y-y_k\right)^2\right]\end{aligned}$$

写成矩阵形式

$$f(x)=f(x^{(k)})+\left[\nabla f(x^{(k)})\right]^T\left(x-x^{(k)}\right)+\frac{1}{2}\left(x-x^{(k)}\right)^T\nabla^2 f(x^{(k)})\left(x-x^{(k)}\right)$$

其中

$$\nabla f=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{bmatrix},\nabla^2 f=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}$$

令 $\nabla f,\nabla^2 f$ 分别表示为 g,H，对二阶泰勒展开的矩阵形式求导得二维牛顿算法的迭代公式为

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-H_k^{-1}\cdot g_k$$

6 母函数法

Example 22. 试解递推关系

$$\begin{cases}F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\\ F_1=F_2=1\end{cases}$$

Solution. 由原关系可推得 $F_0=0$，令

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}F_nx^n$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}F_nx^n&=\sum_{n=2}^{\infty}\left(F_{n-1}+F_{n-2}\right)x^n=\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-2}x^n\\&=x\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}x^{n-1}+x^2\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-2}x^{n-2}\\ \Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}F_nx^n-F_1x&=x\sum_{i=1}^{\infty}F_ix^i+x^2\sum_{i=0}^{\infty}F_ix^i\end{aligned}$$

$$g(x)-x=xg(x)+x^2g(x)$$

解得

$$g(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$$

设 $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x}{(1-x_1x)(1-x_2x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-x_1x}-\frac{1}{1-x_2x}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left[1+x_1x+(x_1x)^2+\cdots\right]-\left[1+(x_2x)+(x_2x)^2+\cdots\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(x_1-x_2)x+\left(x_1^2-x_2^2\right)x^2+\cdots\right] \\
\Rightarrow F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^n-x_2^n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]
\end{aligned}$$

Example 23. 试解错排数 D_n 满足的递推关系

$$\begin{cases} D_n-nD_{n-1}=(-1)^n \\ D_0=1, D_1=0 \end{cases}$$

Solution. 令

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}D_n\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n}{n!}x^n$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \sum_{n=1}^{\infty}(D_n-nD_{n-1})\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!} \\
\Rightarrow \quad & \sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{x^n}{n!}-x\sum_{n=1}^{\infty}D_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!} \\
\Rightarrow \quad & [G(x)-1]-xG(x)=e^{-x}-1 \\
\Rightarrow \quad & G(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}=\frac{1}{1-x}\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\cdots\right) \\
\Rightarrow \quad & \frac{D_n}{n!}=1-1+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!} \\
\Rightarrow \quad & D_n=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right].
\end{aligned}$$

Example 24. 用母函数求解

$$\begin{cases} D_n-2D_{n-1}=1 \\ D_0=0, D_1=1 \end{cases}$$

Solution.

$$\begin{aligned}
& D_nx^n-2D_{n-1}x^n=x^n \\
& \sum_{n=1}^{+\infty}D_nx^n-2\sum_{n=1}^{+\infty}D_{n-1}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}x^n \\
& \sum_{n=1}^{+\infty}D_nx^n-2x\sum_{n=1}^{+\infty}D_{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}x^n=\frac{x}{1-x}
\end{aligned}$$

不妨令 $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} D_n x^n$

$$f(x)-2xf(x)=\frac{x}{1-x}$$

$$f(x)=\frac{x}{(1-x)(1-2x)}=\frac{-1}{1-x}+\frac{1}{1-2x}=-\sum_{n=0}^{+\infty}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}2^nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2^n-1\right)x^n$$

$$D_n=2^n-1.$$

7　2019 年 6 月考试真题

Example 25. （*15* 分）函数空间 $C^{(1)}[a,b]=\{f(x):f(x)\text{在}[a,b]\text{具有 }1\text{ 阶连续偏导数}\}$ 的距离

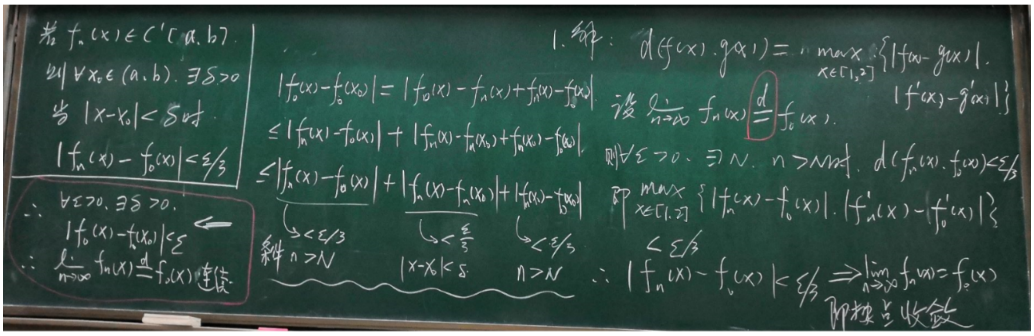
$$d(f(x),g(x))=\max_{0\le j\le 1}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(j)}(x)-g^{(j)}(x)\right|,f(x),g(x)\in C^{(1)}[a,b]$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)\overset{d}{=}f^*(x)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f^*(x)$$

按点收敛.

Solution. 求解过程如下



Example 26. （*10* 分）设计两种求解 $x^5+x-1=0$ 的迭代算法并说明其收敛性.

Solution. 第一种，构造迭代格式如下：

$$x_n=\varphi(x_{n-1})=\frac{1+5x_{n-1}-x_{n-1}^5}{6}$$

$\varphi'(x)=\frac{5}{6}-\frac{5}{6}x^4<\frac{5}{6}<1$（$x\in(0,1)$），根据不动点迭代法的收敛性知，$x_n=\varphi(x_{n-1})$ 产生的序列 $\{x_n\}$ 必收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点.

第二种，根据牛顿法来构造，先求解 $f(x)=x^5+x-1$ 的导数，再构造迭代格式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Example 27. （*10* 分）将函数 $f(x)=x^2+1,|x|<1$ 用 *Legendre* 展开.

Example 28. （*15* 分）*Dijkstra* 算法图示求解 u_0 到其他点的最短路，例如模拟与练习题 *1* 的第 *5* 题.

Example 29. （*15* 分）求极值问题

$$J[y(x)]=\int_1^2\frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{x}dx, M_1(1,0), M_2(2,1)$$

Solution. *E-L* 方程化简为

$$\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{(y')^2+1}=c_1$$

$$y'=\pm\frac{c_1x}{\sqrt{1-(c_1x)^2}}$$

$$y=\mp\frac{1}{c_1}\sqrt{1-(c_1x)^2}+c_2$$

将 $M_1(1,0), M_2(2,1)$ 代入得

$$\begin{cases}0=-\dfrac{1}{c_1}\sqrt{1-(c_1)^2}+c_2\\ 1=-\dfrac{1}{c_1}\sqrt{1-4(c_1)^2}+c_2\end{cases}$$

解得 $c_1=\dfrac{\sqrt{5}}{5}, c_2=2$，于是

$$x^2+(y-2)^2=5.$$

Example 30. （*15* 分）求人狼羊菜问题的最短路径，并说明其唯一性.

Example 31. *1.* 图解二维牛顿算法，并写出算法步骤.（*10* 分）

2. 说明集合度量的实际意义.（*5* 分）

Example 32. （*5* 分）试解递推关系

$$\begin{cases}F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\\ F_1=F_2=1\end{cases}$$