Game Theory

Bing Tan

2018-4-17

1 博弈论的基本类型

图 1: 博弈论的基本类型

2 完全信息静态博弈

博弈论三要素：参与人、战略、支付

完全信息静态博弈的几点特性

- 同时出招，出招一次；
- 知道博弈结构与游戏规则（共同知识）；
- 不管是否沟通过，无法做出有约束力的承诺（非合作）

2.1 纳什均衡

- 占优战略均衡
- 重复剔除的占优战略均衡
- 纳什均衡

2.2 第一个题

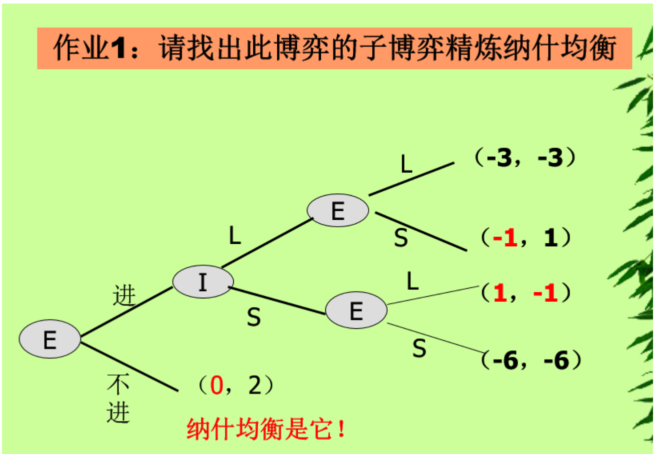
求纳什均衡、重复剔除占优战略均衡、说明二者之间的关系。

	左	中	右
上	2，0	1，1	4，2
中	3，4	1，2	2，3
下	1，3	0，2	3，0

3 完全信息动态博弈

博弈论的战略式和扩展式的转换要会。

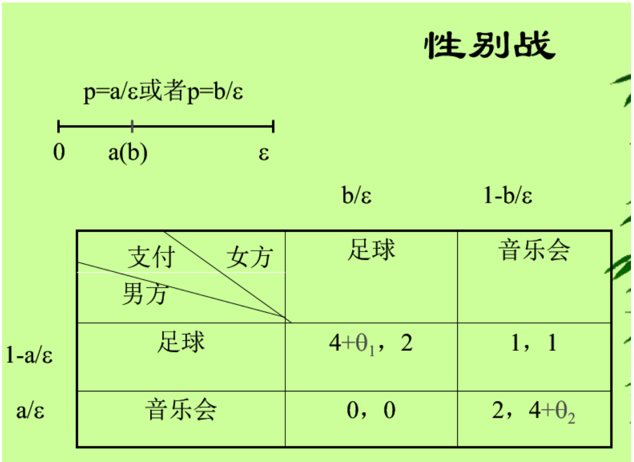
子博弈精炼纳什均衡容易考选择题：逆向归纳法



4 不完全信息静态博弈

4.1 贝叶斯均衡与混合战略均衡: 第二个题

例 1：验证海萨尼关于混合策略和不完全信息博弈关系的结论。



分析（有助于理解）：完全信息情况下的“性别战”加上不完全信息，想象两人还不十分了解，当双方都去看足球赛时男士得到的支付是 $4+\theta_1$，双方都去听音乐会时女士得到的支付为 $4+\theta_2$。两人知道自己的类型，但不清楚对方 θ 值的大小，只知道对方的 θ 值是均匀地分布在区间 $[0,\varepsilon]$ 上的随机变量。

如果男士的类型 θ_1 不小于某一临界值 a，他选择“足球”，否则选择“音乐会”；如果女士的类型 θ_2 不小于某一临界值 b，她选择“音乐会”，否则选择“足球”。

解答：

男士选择足球的条件：

$$(4+\theta_1)\times\frac{b}{\varepsilon}+1\times(1-\frac{b}{\varepsilon})>0\times\frac{b}{\varepsilon}+2\times(1-\frac{b}{\varepsilon})$$

整理后得到男士选“足球”的充要条件是：

$$\theta_1>\frac{\varepsilon}{b}-5=a \tag{1}$$

女士选择音乐会的条件：

$$2\times(1-\frac{a}{\varepsilon})+0\times\frac{a}{\varepsilon}<1\times(1-\frac{a}{\varepsilon})+(4+\theta_2)\times\frac{a}{\varepsilon}$$

整理后得到女士选择“音乐会”的充要条件是：

$$\theta_2>\frac{\varepsilon}{a}-5=b \tag{2}$$

联立方程 1和 2，解得：

$$a=b=\frac{-5+\sqrt{25+4\varepsilon}}{2}$$

男士选择足球的概率是：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0} 1-\frac{a}{\varepsilon}\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0} 1-\frac{-5+\sqrt{25+4\varepsilon}}{2\varepsilon}\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0} 1-\frac{4\varepsilon}{2\varepsilon\times(5+\sqrt{25+4\varepsilon})}\\
=&\frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

如果男方分别以 $(q, 1-q)$ 选择足球和音乐会，女方分别以 $(p, 1-p)$ 选择足球和音乐会，下面求解在此混合策略下的均衡。

男方选择足球和音乐会的期望收益相等

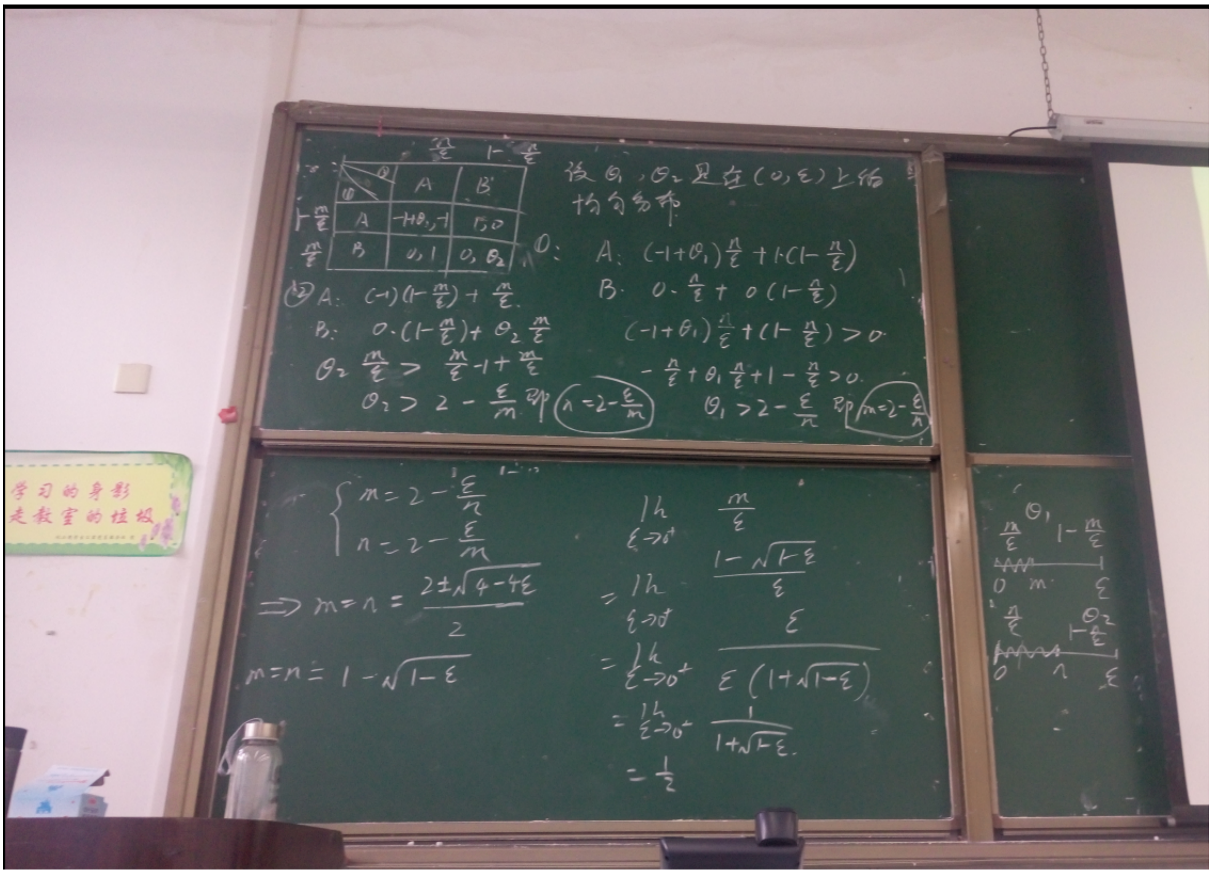
$$4p + 1(1-p) = 0p + 2(1-p)$$

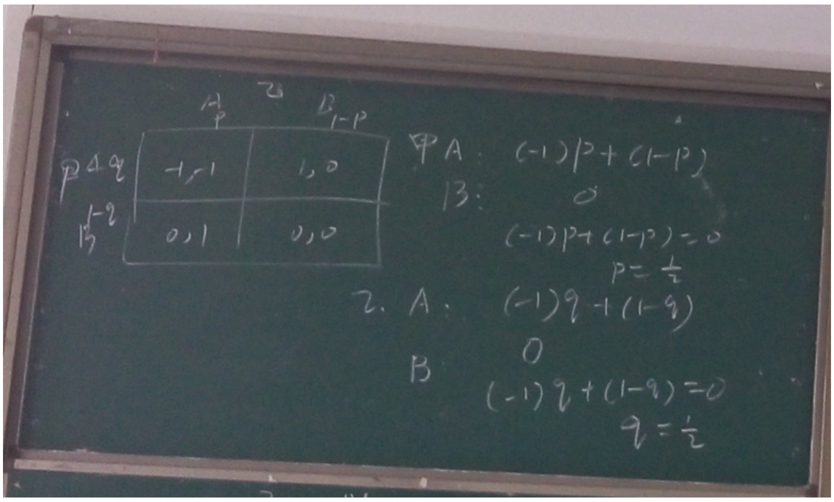
解得 $p = 1/5$，$1-p = 4/5$.

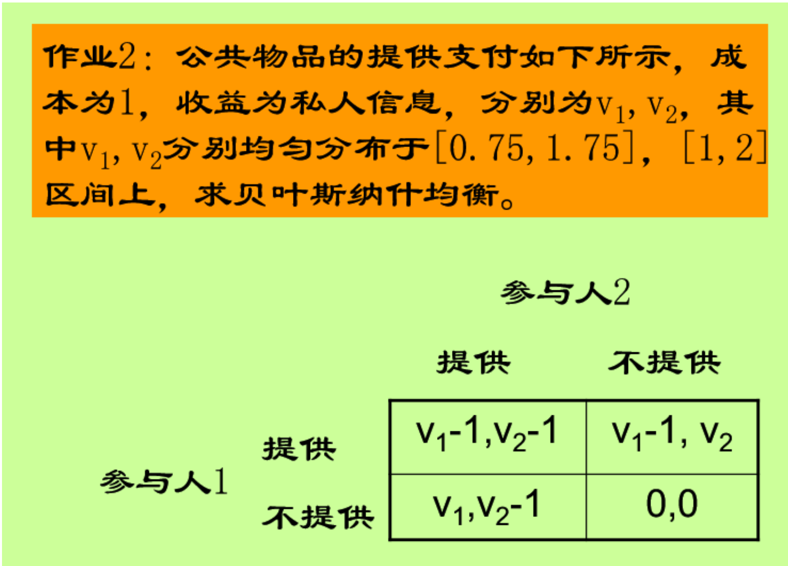
同理求得 $q = 1/5$，$1-q = 4/5$.

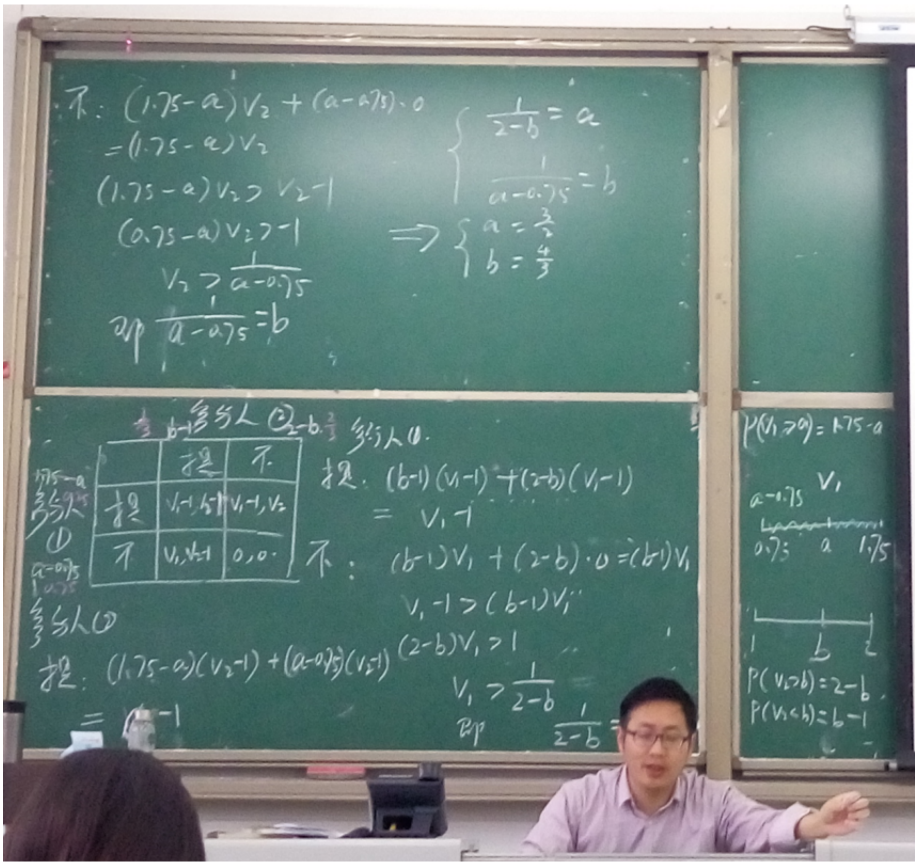
在上述贝叶斯均衡中，两个局中人使用的都是单纯战略，因为不知道对方的类型，感觉面对的像是混合战略的博弈对手。如果令 ε 为 0，男士选足球的概率 $1-\frac{a}{\varepsilon}$ 趋于 $4/5$。当不完全信息消失时，贝叶斯均衡趋向于完全信息下的混合均衡。

例 2：

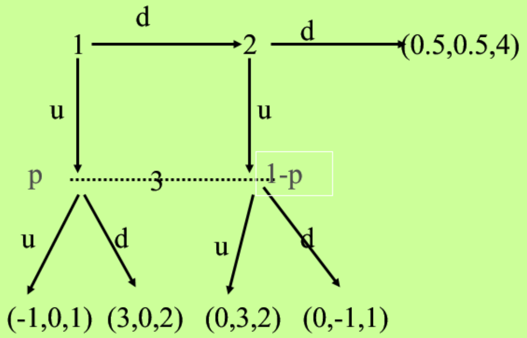



甲A: (-1)p+(1-p)
B: 0
(-1)p+(1-p)=0
p=1/2
乙. A: (-1)q+(1-q)
B 0
(-1)q+(1-q)=0
q=1/2


作业2：公共物品的提供支付如下所示，成本为1，收益为私人信息，分别为v1, v2，其中v1, v2分别均匀分布于[0.75, 1.75]，[1, 2]区间上，求贝叶斯纳什均衡。
参与人2
提供
不提供
参与人1
提供
v1-1,v2-1
v1-1, v2
不提供
v1,v2-1
0,0


a = 3/2
b = 4/3

练习：有哪些均衡？哪些均衡有问题？



纳什均衡(d,u,u)、(u,u,d)、(u,d,d)

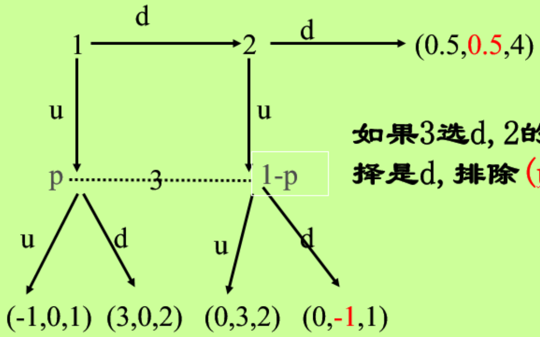
	u	d
u	-1,0,1	-1,0,1
d	0,3,2	0.5,0.5,4

u

	u	d
u	3,0,2	3,0,2
d	0,-1,1	0.5,0.5,4

d

检验(d,u,u)、(u,u,d)、(u,d,d)



如果3选d，2的最佳选择是d，排除(u, u, d)

PNBE：(u, d, d)，p≥1/2

PNBE：(d, u, u)，p<1/2