泛函分析

基础与前沿研究院

谭兵，bingtan72@stu.uestc.edu.cn

2018 年 12 月 19 日

1 度量空间

度量空间满足如下几条性质

(a) $d(x,y) \geq 0$；

(b) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$；

(c) $d(x,y) = d(y,x)$；

(d) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

(M,d) 称为度量空间。

$d : \mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^k \to \mathbb{R}$ 的距离定义为：

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2}$$

连续函数的距离定义为：$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in M\}$

开球：$B_x(r) = \{y \in M : d(x,y) < r\}$

闭球：$B_x(r) = \{y \in M : d(x,y) \leq r\}$

两个重要不等式

（**Minkowski’s inequality** $1 \leq p < \infty$）：

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |x_j + y_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{k} |y_j|^p \right)^{1/p}$$

（**Holder’s inequality** $1 < p < \infty$ 且 $p^{-1} + q^{-1} = 1$）：

$$\sum_{j=1}^{k} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{k} |y_j|^q \right)^{1/q}$$

特别的，当 $p = q = 2$ 时

$$\sum_{j=1}^{k} |x_j|\,|y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{k} |y_j|^2 \right)^{1/2}$$

紧集：X 有收敛子列，并且极限在 X 中。紧集就是闭集。

2 赋范空间

2.1 赋范空间

范数满足如下几条性质

(a) $\|x\| \geq 0$；

(b) $\|x\| = 0$ if and only if $x = 0$；

(c) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$；

(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

例子：验证 $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 是一个范数，我们这里只验证最后一条

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j + \mu_j|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 + \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda}_j \mu_j + \sum_{j=1}^{n} \overline{\mu_j} \lambda_j + \sum_{j=1}^{n} |\mu_j|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 + 2 \sum_{j=1}^{n} \Re\mathrm{e}\left(\overline{\lambda_j} \mu_j\right) + \sum_{j=1}^{n} |\mu_j|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 + 2 \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| |\mu_j| + \sum_{j=1}^{n} |\mu_j|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\mu_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{n} |\mu_j|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}
$$

距离和范数的关系：$d(x, y) = \|x - y\|$

2.2 有限维赋范空间

$\|\cdot\|_1$ 范数和 $\|\cdot\|_2$ 等价

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$$

有限维赋范空间中的任意两种范数等价。

赋范空间的有限维子空间是闭的。

任意有限维赋范空间是 Banach 空间。

Y **是 Banach 空间** X **的线性子空间，那么** Y **是 Banach 空间当且仅当** Y **是** X **的闭集。**

3 内积空间

3.1 内积空间

内积空间有如下性质

(a) $(x,x)\geq 0$；

(b) $(x,x)=0$ 当且仅当 $x=0$；

(c) $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$；

(d) $(x,y)=\overline{(y,x)}$；

另外，内积空间有如下结果

(a) $(0,y)=(x,0)=0$；

(b) $(x,\alpha y+\beta z)=\overline{\alpha}(x,y)+\overline{\beta}(x,z)$；

(c) $(\alpha x+\beta y,\alpha x+\beta y)=|\alpha|^2(x,x)+\alpha\overline{\beta}(x,y)+\beta\overline{\alpha}(y,x)+|\beta|^2(y,y)$。

重要结论

(a) 施瓦兹不等式：$|(x,y)|\leq\|x\|\|y\|$；

(b) 内积诱导范数 $\|x\|^2=(x,x)$；

内积诱导出的范数满足平行四边形法则，即

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

例如，连续空间 $C[0,1]$ 上的标准范数不能由内积诱导产生，例如，考虑 $f,g\in C[0,1]$，$f(x)=1,g(x)=x,x\in[0,1]$，那么

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2+\|f-g\|^2&=4+1=5\\2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right)&=2(1+1)=4\end{aligned}$$

不满足平行四边形法则，因此这个范数不能由内积诱导产生。

证明，如果 $\lim_{n\to\infty}x_n=x,\lim_{n\to\infty}y_n=y$，那么 $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(x,y)$。

证明.

$$\begin{aligned}|(x_n,y_n)-(x,y)|&=|(x_n,y_n)-(x_n,y)+(x_n,y)-(x,y)|\\&\leq|(x_n,y_n)-(x_n,y)|+|(x_n,y)-(x,y)|\\&=|(x_n,y_n-y)|+|(x_n-x,y)|\\&\leq\|x_n\|\,\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\,\|y\|\end{aligned}$$

由于 $\{x_n\}$ 是收敛的，那么 $\|x_{n\|}$ 是有界的，因此 $\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(x,y)$。 □

任意有限维内积都是 Hilbert 空间。

如果 Y 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的线性子空间，那么 Y 是 Hilbert 空间当且仅当 Y 在 $\mathcal{H}$ 中是闭的。

3.2 正交补

设 A 是内积空间 X 的子集，那么 A 的正交补是

$$A^{\perp} = \{x \in X : (x, a) = 0 \ \text{ for all } \ a \in A\}$$

性质：

(a) $\{0\}^{\perp} = X; X^{\perp} = \{0\}$；

(b) If $B \subset A$ then $A^{\perp} \subset B^{\perp}$；

(c) $A^{\perp}$ is a closed linear subspace of X；

(d) $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$；

射影定理：设 Y 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的闭线性子空间，对于任意的 $x \in \mathcal{H}$，都存在一个唯一的 $y \in Y$ 和 $z \in Y^{\perp}$，使得 $x = y + z$（x 关于 y 的正交分解），同时 $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$.

如果 Y 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的闭线性子空间，那么 $Y^{\perp\perp} = Y$.

4 线性算子

定义：设 T 是从赋范空间 X 到赋范空间 Y 的映射，若对任意的 α，β 有 $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$，则称 T 为线性算子。

算子有界：存在一个整数 k，使得对于任意的 x 有 $\|T(x)\| \le k\|x\|$.

例题：设 X 和 Y 是赋范线性空间，$T : X \to Y$ 是一个线性变换，证明算子连续和算子有界是等价的！

证明：由于 T 是一个线性变换

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \le k\|x - y\|$$

对于任意的 $x, y \in X$. 设 $\epsilon > 0$ ，令 $\delta = \frac{\epsilon}{k}$. 那么，当 $x, y \in X$ 和 $\|x - y\| < \delta$

$$\|T(x) - T(y)\| \le k\|x - y\| < k\left(\frac{\epsilon}{k}\right) = \epsilon$$

因此 T 是（一致）连续的。

设 X 是有限维的赋范空间，Y 是任意的赋范线性空间，令 $T : X \to Y$ 是一个线性变换，则 T 是连续的。

证明：为了区别 X 的范数，我们定义 $\|\cdot\|_1 : X \to \mathbb{R}$ 为 $\|x\|_1 = \|x\| + \|T(x)\|$，下面我们将展示 $\|\cdot\|_1$ 为 X 上的范数，设 $x, y \in X$，$\lambda \in \mathbb{F}$

(i) $\|x\|_1 = \|x\| + \|T(x)\| \ge 0$；

(ii) If $\|x\|_1 = 0$ then $\|x\| = \|T(x)\| = 0$ and so $x = 0$ while if $x = 0$ then $\|x\| = \|T(x)\| = 0$ and so $\|x\|_1 = 0$；

(iii)

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_1 = \|\lambda x\| + \|T(\lambda x)\| = |\lambda|\|x\| + |\lambda|\|T(x)\| = |\lambda|(\|x\| + \|T(x)\|)\\ = |\lambda|\|x\|_1\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\|x+y\|_1 &= \|x+y\| + \|T(x+y)\|\\ &= \|x+y\| + \|T(x)+T(y)\|\\ &\leq \|x\| + \|y\| + \|T(x)\| + \|T(y)\|\\ &= \|x\|_1 + \|y\|_1\end{aligned}$$

因此，$\|\cdot\|_1$ 是 X 上的范数，由于 X 是有限维的，那么 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_1$ 是等价的，存在一个正常数使得 $\|x\|_1 \leq K\|x\|$，对于任意的 $x \in X$ 有 $\|T(x)\| \leq \|x\|_1 \leq K\|x\|$，因此 T 是有界的。

如果 X 和 Y 是赋范线性空间，$T : X \to Y$ 是连续线性变换，则 $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in X : T(x) = 0\}$ 是闭的。

4.1 有界线性算子的范数

定义：$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$。

如果 $\|T(x)\| = \|x\|$，则称 T 是等距算子，且 $\|T\| = 1$.

4.2 有界线性算子空间

如果 X 是一个赋范线性空间，Y 是一个 Banach 空间，则有界线性空间 $B(X,Y)$ 是一个 Banach 空间。

对偶空间：设 X 是一个赋范空间，从 X 到 $\mathbb{F}$ 的线性变换被称为线性泛函，空间 $B(X,\mathbb{F})$ 被称为 X 的对偶空间，记为 X'.

如果 X 是一个赋范空间，那么 X' 是一个 Banach 空间。

Banach 同构定理：如果 X, Y 是 Banach 空间，且 $T \in B(X,Y)$ 是双射，则 T 可逆。

$\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leq \|T^{-1}\|\,Tx\|$，$\|Tx\| \geq \|T^{-1}\|^{-1}\,\|x\|$.

5 对偶和 Hahn-Banach 定理

次线性泛函：设 X 是一个实向量空间，X 上的次线性泛函 $p : X \to R$ 定义如下：

(a) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad x, y \in X$

(b) $p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad x \in X, \alpha \geq 0$

半范：设 X 是一个实或复向量空间，X 上的半泛是一个实值函数 $p : X \to R$ 定义如下：

(a) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad x, y \in X$

(b) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \quad x \in X, \alpha \in \mathbb{F}$

半范性质：

$$p(0)=0, \quad p(-x)=p(x), \quad p(x)\geq 0, \quad x\in X$$

$$p(0)=p(0\cdot 0)=|0|p(0)=0$$

$$p(-x)=|-1|p(x)=p(x), p(0)=p(-x+x)\leq p(-x)+p(x)=2p(x), p(x)\geq 0$$

（Banach 空间中的 Hahn-Banach 定理）：X 是一个赋范空间，W 是 X 的线性子空间，对于任意 W 上的线性泛函 $f_w\in W'$，存在 f_w 的一个扩张 $f_X\in X'$，使得 $\|f_X\|=\|f_W\|$.

（重要推论）：

X 为线性赋范空间，对于任意的 $x\in X$：

(a) 存在 $f\in X'$ 使得 $\|f\|=1$ 且 $f(x)=\|x\|$；

(b) $\|x\|=\sup\{|f(x)|: f\in X', \|f\|=1\}$.

二次对偶空间：对于任意的 $x\in X$ ，定义 $F_x: X'\to\mathbb{F}$ 通过

$$F_x(f)=f(x), \quad f\in X'$$

那么 $F_x\in X''$ and $\|F_x\|=\|x\|$.

证明：设 $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ ，$f,g\in X'$ ，根据 F_x 的定义，

$$F_x(\alpha f+\beta g)=\alpha f(x)+\beta g(x)=\alpha F_x(f)+\beta F_x(g)$$

因此 F_x 是线性的，且

$$\|F_x(f)\|=\|f(x)\|\leq\|f\|\|x\|$$

那么 $\|F_x\|\leq\|x\|$，另一方面

$$\forall x\in X, \exists g\in X', \|g\|=1, g(x)=\|x\|$$

$$\|F_x\|=\|F_x\|\|g\|\geq\|F_x(g)\|=g(x)=\|x\|$$

所以有 $\|F_x\|\geq\|x\|$，综上 $\|F_x\|=\|x\|$.

6 Hilbert 空间中的线性算子

设 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 是完备的 Hilbert 空间，$T\in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$，对于任意的 $x\in\mathcal{H}$ 和 $y\in\mathcal{K}$ ，存在一个唯一的算子 $T^*\in B(\mathcal{K},\mathcal{H})$ 使得

$$(Tx,y)=(x,T^*y)$$

T^* 称为伴随算子（共轭算子）

T^* **是一个线性变换**

$$\begin{aligned}(x,T^*(\lambda y_1+\mu y_2)) &= (T(x),\lambda y_1+\mu y_2)\\ &= \overline{\lambda}(T(x),y_1)+\overline{\mu}(T(x),y_2)\\ &= \overline{\lambda}(x,T^*(y_1))+\overline{\mu}(x,T^*(y_2))\\ &= (x,\lambda T^*(y_1)+\mu T^*(y_2))\end{aligned}$$

因此 $T^*(\lambda y_1+\mu y_2)=\lambda T^*(y_1)+\mu T^*(y_2)$，$T^*$ 是一个线性变换。

T^* 是有界的

$$\|T^*(y)\|^2=(T^*(y),T^*(y))=(TT^*(y),y)\le\|TT^*(y)\|\,\|y\|\le\|T\|\,\|T^*(y)\|\,\|y\|$$

因此 $\|T^*(y)\|\le\|T\|\|y\|$，$\|T^*\|\le\|T\|$.

T^* 是唯一的

$$(Tx,y)=(x,B_1y)=(x,B_2y)$$

$$(x,B_1y-B_2y)=0,\text{特别的，当}x=B_1y-B_2y,(B_1y-B_2y,B_1y-B_2y)=0$$

因此 $B_1y=B_2y$.

例题：证明 $(\mu R+\lambda S)^*=\overline{\mu}R^*+\overline{\lambda}S^*$

证明：

$$\begin{aligned}(x,(\mu R+\lambda S)^*y)&=((\mu R+\lambda S)x,y)\\&=\mu(Rx,y)+\lambda(Sx,y)\\&=\mu(x,R^*y)+\lambda(x,S^*y)\\&=(x,(\mu R^*+\lambda S^*)y)\end{aligned}$$

所以 $(\mu R+\lambda S)^*=\mu R^*+\lambda S^*$.

（引理）：设 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 是完备的 Hilbert 空间，$T\in B(\mathcal{H},\mathcal{K})$

(a) $\operatorname{Ker} T=(\operatorname{Im}T^*)^\perp$；

(b) $\operatorname{Ker} T^*=(\operatorname{Im}T)^\perp$；

(c) $\operatorname{Ker} T^*=\{0\}$ 当且仅当 $\operatorname{Im}T$ 在 $\mathcal{K}$ 中稠密.

证明：

(a) **第一步：$\mathbf{Ker}\ T\subseteq(\operatorname{Im}T^*)^\perp$**

设 $x\in\operatorname{Ker}T$，$z\in\operatorname{Im}T^*$，存在 $y\in\mathcal{K}$ 使得 $T^*y=z$

$$(x,z)=(x,T^*y)=(Tx,y)=0$$

因此 $x\in(\operatorname{Im}T^*)^\perp$ 所以 $\operatorname{Ker}T\subseteq(\operatorname{Im}T^*)^\perp$

第二步：$(\operatorname{Im}T^*)^\perp\subseteq\mathbf{Ker}\ T$

设 $v\in(\operatorname{Im}T^*)^\perp$，由 $T^*Tv\in\operatorname{Im}T^*$ 我们有

$$(Tv,Tv)=(v,T^*Tv)=0$$

因此 $Tv=0$，$v\in\operatorname{Ker}\ T$

综上，有 $\operatorname{Ker}\ T=(\operatorname{Im}T^*)^\perp$；

(b) $\operatorname{Ker}\ T^*=(\operatorname{Im}((T^*)^*))^\perp=(\operatorname{Im}T)^\perp$

(c) 必要条件：如果 $\operatorname{Ker}\ T^*=\{0\}$，那么 $\left((\operatorname{Im}T)^\perp\right)^\perp=(\operatorname{Ker}T^*)^\perp=\{0\}^\perp=\mathcal{K}$，即 $\operatorname{Im}\ T$ 在 $\mathcal{K}$ 中稠密；

充分条件：如果 $\operatorname{Im}\ T$ 在 $\mathcal{K}$ 中稠密，那么 $\left((\operatorname{Im}T)^\perp\right)^\perp=\mathcal{K}$，因此，$\operatorname{Ker}T^*=(\operatorname{Im}T)^\perp=\left(\left((\operatorname{Im}T)^\perp\right)^\perp\right)^\perp=\mathcal{K}^\perp=\{0\}$

7 紧算子

设 X，Y 为线性赋范空间，称线性算子 T 为紧算子，若对 X 中任意有界点列 $\{x_n\}$，$\{Tx_n\}$ 在 Y 中均有收敛子列。紧算子空间表示为 $H(X,Y)$.

设 X，Y 为线性赋范空间，T 为紧算子，则 T 有界（**紧算子一定是有界算子** $H(X,Y) \subset B(X,Y)$）。

T **有界、不紧，**S **紧，则** ST **为紧算子.**

无穷维赋范空间上的单位算子不是紧算子，无穷维赋范空间上的紧算子不可逆。

8 Sobolev 空间--辅助知识

设区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，记

$$C(\Omega) \triangleq \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ is continuous }\}$$

$$C^m(\Omega) \triangleq \{f \in C(\Omega) : D^\alpha f \in C(\Omega) \text{ for all } \alpha, |\alpha| \leq m\}, m \geq 0$$

$C_0^m(\Omega)$ **是** $C^m(\Omega)$ **中有紧支集函数的子集。**

半范空间 (V,p) 的定义如下，对于所有的 $\alpha \in \mathbb{F}$

$$p(\alpha v) = |\alpha| p(v)$$
$$p(v_1 + v_2) \leq p(v_1) + p(v_2)$$

9 Sobolev 空间--广义函数

9.1 广义函数

$C^0(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上有界连续函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 组成的 Banach 空间

$$\|f\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \triangleq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$$

$C^k(\mathbb{R}^n)$ 为 k 次连续可微且各阶导数均有界的函数集合的 Banach 空间

$$\|f\|_{C^k(\mathbb{R}^n)} \triangleq \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\alpha|=j} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f(x)|$$

$C^\infty(\mathbb{R}^n)$ **光滑函数，且所有阶导数均有界**

$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ **为所有光滑且有紧支集的函数** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ **的集合**

Ω 上的一个广义函数是一个连续线性泛函 $\lambda : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$，这样的广义函数空间记为 $\mathcal{D}'(\Omega)$.

对于所有试验函数 $f \in C_c^\infty$，$g(f) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx$

$$\delta(\varphi) = \varphi(0)$$

$\dfrac{1}{x}$ 的主值

$$p.v.\frac{1}{x}(f) \triangleq \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon}\frac{f(x)}{x}dx$$

$$\lambda_r(f) \triangleq \int_{|x|<r}\frac{f(x)-f(0)}{|x|}dx + \int_{|x|\geq r}\frac{f(x)}{|x|}dx$$

广义函数 λ 的偏导数 $\frac{\partial}{\partial x_j}\lambda$ 为

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\lambda(f) \triangleq -\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x_j}f\right)$$

$$\partial^\alpha f(\varphi) = (-1)^\alpha\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial^\alpha\varphi(x)dx$$

Heavside 函数的导数

$$\partial H(\varphi) = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

Laplace 微分算子

$$\Delta_n = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$$

乘法法则：

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f\lambda) = f\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\lambda\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_j}f\right)\lambda$$

δ 函数

$$\delta = \begin{cases} 0 & x\neq 0 \\ \infty & x = 0\end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = 1$$

证明：$\frac{d}{dx}\mathrm{sgn}(x) = 2\delta$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\mathrm{sgn}(x)(f) &= \int_R -\mathrm{sgn}(x)(f')dx = \int_{-\infty}^0 f'dx - \int_0^\infty f'dx \\ &= \lim_{m_1\to+\infty} f|_{-m_1}^0 - \lim_{m_2\to+\infty} f|_0^{m_2} = f(0)-(-f(0)) = 2f(0) = 2\delta(f)\end{aligned}$$

证明：$\frac{d}{dx}\log|x| = p.v.\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log|x|(f) &= -\int_R \log|x|(f')dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\log|x|(f')dx \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x>\varepsilon}\log(x)(f')dx - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x<-\varepsilon}\log(-x)(f')dx \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\log(x)(f)|_\varepsilon^{+\infty} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x>\varepsilon}\frac{f(x)}{x}dx - \lim_{\varepsilon\to 0}\log(-x)(f)|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x<-\varepsilon} -\frac{f(x)}{x}dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{f(x)}{x}dx\end{aligned}$$

证明：$\frac{d}{dx}|x| = \mathrm{sgn}(x)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}|x|(f) &= -\int_R |x|(f')dx = -\int_{-\infty}^0 -x(f')dx - \int_0^\infty x(f')dx \\ &= xf|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 fdx - xf|_0^\infty + \int_0^\infty fdx \\ &= \mathrm{sgn}(f)\end{aligned}$$

9.2 Fourier 变换

$$\hat{f}(\xi) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx$$

(Riemann-Lebesgue 引理)

$$f \in L^1\left(\mathbb{R}^n\right) \Rightarrow \lim_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$$

衰减变换到正则性

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \hat{f}(\xi) = -2\pi i \widehat{x_j f(\xi)}$$

正则性变换到衰减

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi) = 2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi)$$

9.3 Schwartz 函数类

速降函数 f:$|x|^n f(x)$ 有界;

Schwartz 函数:$\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f$ 都速降,所有 Schwartz 函数组成的空间记为 $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$

伴随 Fourier 变换 $\mathcal{F}^* : \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right) \to \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 定义为 $\left(\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*\right)$

$$\mathcal{F}^* F(x) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi \cdot x} F(\xi) d\xi$$

对所有 $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 有 Plancherel 等式

$$\|\mathcal{F} f\|_{L^2\left(\mathbb{R}^n\right)} = \|f\|_{L^2\left(\mathbb{R}^n\right)} = \|\mathcal{F}^* f\|_{L^2\left(\mathbb{R}^n\right)}$$

9.4 缓增函数

缓增分布是 Schwartz 空间 $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 上的一个连续线性泛函

缓增分布集记为 $S'\left(\mathbb{R}^n\right)$,$C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ 连续嵌入到 $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$

反演公式

$$\mathcal{F} \delta = 1, \mathcal{F} 1 = \delta$$

10 Sobolev 空间 $W^{s,p}\left(\mathbb{R}^n\right)$

10.1 Hölder 空间 $C^{k,\alpha}(\Omega)$

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \triangleq \|f\|_{C^0(\Omega)} + \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \triangleq \sum_{|\alpha| \leq k} \left\|\partial^\alpha f\right\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$$

问题三:对每一 $0 \leq \alpha \leq 1$,$C^{0,\alpha}(\Omega)$ 为 **Banach** 空间

10.2 经典 Sobolev 空间

设 $f \in L^p(\Omega)$，且 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ，如果存在一个 $g \in L^1(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega f\partial^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g\varphi dx$$

则称 g 是 f 的 α 阶弱导数.

如果函数 f 的弱导数 $\partial^\alpha f$（$|\alpha| \leq m$）存在且属于 $L^p(\Omega)$，则称其是 $W^{m,p}(\Omega)$，其范数定义如下：

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} \triangleq \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}$$

如果 $m = 1$，那么

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \| \nabla f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Schwartz 函数空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ 中稠密

10.3 Sobolev 嵌入定理

证明：空间 $W^{1,1}(\mathbb{R})$ 连续嵌入到 $W^{0,\infty}(\mathbb{R}) = L^\infty(\mathbb{R})$

证明. 为证明如上结果, 需要证明存在一个常数 $C > 0$，对所有试验函数 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 使得

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{R})}$$

对所有 x，由微积分基本定理可得

$$|f(x) - f(0)| = \left|\int_0^x f'(t)dt\right| \leq \|f'\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{R})}$$

由三角不等式，

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq |f(0)| + \|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{R})}$$

取 x 足够大，由 f 的支集可知 $f(x) = 0$，因此，

$$|f(0)| \leq \|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{R})}$$

即是

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2\|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{R})}$$

存在 $C = 2$，得证。 □

(一阶导数的 Sobolev 嵌入定理) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有光滑边界的区域，$1 \leq p < n$，则 $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$，进一步，该嵌入在如下意义下连续：存在 $C(n,p,\Omega)$ 使得对所有 $f \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|f\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \leq C\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

证明. 我们仅考虑 $\Omega=\mathbb{R}^n$ 的情形，更一般地情形的证明是类似的。设 $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，

先考虑 $p=1$ 的情形，由微积分基本定理及 f 的紧支集可知，对所有 $x\in\mathbb{R}^n$，

$$f(x)=\int_{-\infty}^{x_k}\partial_{x_k}f(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n)\,dr$$

因此，

$$\begin{aligned}|f(x)|&\le\int_{-\infty}^{x_k}|\partial_{x_k}f|\,dr\\&\le\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_{x_k}f|\,dx_k\end{aligned}$$

取这些项的乘积，取 $(n-1)^{th}$ 次方可得

$$|f(x)|^{\frac{n}{n-1}}\le\prod_{k=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_{x_k}f|\,dx_k\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

对上式关于 x_1 在 $\mathbb{R}$ 上积分，应用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1&\le\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_{x_k}f|\,dx_k\right)^{\frac{1}{n-1}}dx_1\\&=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_{x_1}f|\,dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_{x_k}f|\,dx_k\right)^{\frac{1}{n-1}}dx_1\\&\le\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_{x_1}f|\,dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\prod_{k=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_{x_k}f|\,dx_kdx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\end{aligned}$$

在上不等式两边关于 x_2 积分可得

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1dx_2\\&\le\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_{x_1}f|\,dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\prod_{k=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_{x_k}f|\,dx_kdx_1\right)^{\frac{1}{n-1}}dx_2\\&\le\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_{x_2}f|\,dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_{x_1}f|\,dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\prod_{k=3}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\partial_{x_k}f|\,dx_kdx_1dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\end{aligned}$$

重复如上步骤可得

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1\cdots dx_n\le\prod_{k=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\partial_{x_k}f|\,dx_1\cdots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

注意到 f 的支集在 Ω 中，可得

$$\int_{\Omega}|f(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx\le\prod_{k=1}^{n}\left(\int_{\Omega}|\partial_{x_k}f|\,dx\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

从而，

$$|f(x)|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)}\le\prod_{k=1}^{n}\left(\int_{\Omega}|\partial_{x_k}f|\,dx\right)^{\frac{1}{n}}\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\Omega}|\partial_{x_k}f|\,dx\le|\nabla f|_{L^1(\Omega)}$$

现在我们考虑 $1<p<n$ 的情形. 设 $\gamma>1$ 是一个将在后面确定的常数. 由以上情形可知

$$\||f|^{\gamma}\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)}\le\int_{\Omega}|\nabla(|f|^{\gamma})|\,dx\le\gamma\int_{\Omega}|f|^{\gamma-1}|\nabla f|dx$$

设 $q=\frac{p}{p-1}$（$p+q=1$），由 Hölder 不等式有

$$\||f|^\gamma\|_{L^{\frac{n}{n-1}}}^{\frac{n}{n-1}} \leq \gamma^{\frac{n}{n-1}}\left(\int_\Omega |f|^{(\gamma-1)q}dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega |\nabla f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

选取 $\gamma=\frac{n-1}{n-p}p$，则有 $(\gamma-1)q=\frac{n}{n-1}\gamma=\frac{np}{n-p}$，从而，

$$\left(\int_\Omega |f|^{\frac{np}{n-p}}dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_\Omega |\nabla f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

得证！ □

$k\geq 2$ **时的 Sobolev 嵌入定理**

$$W^{k,p}(\Omega)\subset\begin{cases} L^{\frac{np}{n-kp}}(\Omega), & kp<n \\ C^m(\Omega), & 0\leq m\leq k-\frac{n}{p}\end{cases}$$

证明. 仅需考虑 $k=2, 2p<n$ 的情形，如果 $f\in W^{2,p}(\Omega)$，则 $f\in W^{1,p}(\Omega)$， $\nabla f\in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^n)$,由 $k=1$ 情形, 我们有 $f\in L^{\frac{n\rho}{n-p}}(\Omega)$， $\nabla f\in L^{\frac{n\rho}{n-p}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$,即 $\nabla f\in W^{1,\frac{np}{n-p}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$(一再利用 $k=1$ 的情形)，$u\in W^{1,p'}(\Omega)$，其中

$$p'=\frac{n\frac{np}{n-p}}{n-\frac{np}{n-p}}=\frac{np}{n-2p}$$

□

10.4 基于 L^2 的 Sobolev 空间

对所有的 $f\in W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\|f\|_{W^{k,2}(\mathbb{R}^n)}^2=\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j=0}^k(2\pi|\xi|)^{2j}|f(\hat{\xi})|^2 d\xi$$

空间 $H^k(\mathbb{R}^n)$ 为所有满足广义函数 $\langle\xi\rangle^k\hat{f}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 的缓增分布 f 组成的空间，范数定义为

$$\|f\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}\triangleq\|\langle\xi\rangle^k\hat{f}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\quad \text{where } \langle x\rangle\triangleq\left(1+|x|^2\right)^{1/2}$$

Schwarz 空间在 $W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ 中稠密，$W^{k,2}(\mathbb{R}^n)=H^k(\mathbb{R}^n)$，显然 $H^0(\mathbb{R}^n)\equiv L^2(\mathbb{R}^n)$
如果 $f\in H^k(\Omega)$，则对所有 $|\alpha|\leq k$，$\partial^\alpha f\in L^2(\Omega)$，反之亦然。

10.5 迹定理

迹函数 $\gamma_0: C^1(\overline{\Omega})\to C^0(\partial\Omega)$（其中 $\Omega=\mathbb{R}^n_+=\{x=(x',x_n): x'\in\mathbb{R}^{n-1}, x_n>0\}$）定义为

$$\gamma_0(\varphi)(x')=\varphi(x',0),\quad \varphi\in C^1(\overline{\Omega}), x'\in\partial\Omega$$

证明. 对任意的 $\varphi\in C^1(\overline{\Omega})$ 及 $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$ 有

$$|\varphi(x',0)|^2=-\int_0^\infty\partial_{x_n}\left(|\varphi(x',x_n)|^2\right)dx_n$$

对上述等式在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上积分有

$$\begin{aligned}\|\varphi(x',0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2 &\le \int_{\mathbb{R}_+^n} \left[(\partial_{x_n}\varphi\cdot\overline{\varphi}+\varphi\cdot\partial_{x_n}\overline{\varphi})\right]dx \\ &\le 2\left\|\partial_{x_n}\varphi\right\|_{L^2\left(\mathbb{R}_+^n\right)}\left\|\varphi\right\|_{L^2\left(\mathbb{R}_+^n\right)}\end{aligned}$$

由不等式 $2ab\le a^2+b^2$ 可得估计

$$\|\varphi(x',0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2 \le \|\varphi\|_{L^2\left(\mathbb{R}_+^n\right)}^2+\|\partial_{x_n}\varphi\|_{L^2\left(\mathbb{R}_+^n\right)}^2$$

由于 $\|\varphi\|_{L^2\left(\mathbb{R}_+^n\right)}^2, \|\partial_{x_n}\varphi\|_{L^2\left(\mathbb{R}_+^n\right)}^2$ 是有界的，所以 $\|\varphi(x',0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2$ 是有界的，得证。 □

Poincaré 不等式：Ω **是有界的，**$\sup\{|x_i|:(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in\Omega\}=K<\infty$

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}\le 2K\left\|\partial_1\varphi\right\|_{L^2(\Omega)},\quad \varphi\in H_0^1(\Omega)$$

11 L^p 空间插值

(L^p 范数的对数凸性)

$$\|f\|_{L^{p_\theta}(X)}\le \|f\|_{L^{p_0}(X)}^{1-\theta}\|f\|_{L^{p_1}(X)}^{\theta}$$

其中 $\frac{1}{p_\theta}\triangleq\frac{(1-\theta)}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}$

Chebyshev 不等式

$$\lambda_f(t)\le\frac{1}{t^p}\|f\|_{L^p(X)}^p$$

弱 L^p 范数定义如下：

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X)}\triangleq\sup_{t>0}t\lambda_f(t)^{1/p}$$

由 Chebyshev 不等式可得

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X)}\le\|f\|_{L^p(X)}$$

因此 $L^p(X)\subset L^{p,\infty}(X)$

$$\|f\|_{L^{p_\theta,\infty}(X)}\le\|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}^{1-\theta}\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}^{\theta}$$

证明：

$$\|f\|_{L^{p_\theta}(X)}\le C_{p_0,p_1,\theta}\|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}^{1-\theta}\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}^{\theta}$$

证明.

$$\lambda_f(t)\le\frac{\|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}^{p_0}}{t^{p_0}}$$

$$\lambda_f(t)\le\frac{\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}^{p_1}}{t^{p_1}}$$

从而，对所有 $0<\theta<1$ 成立

$$\lambda_f(t)\le\frac{\|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}^{p_0(1-\theta)}\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}^{p_1\theta}}{t^{p_0(1-\theta)+p_1\theta}} \tag{1}$$

设 t_0 是使得

$$\frac{\|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}^{p_0}}{t^{p_0}}=\frac{\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}^{p_1}}{t^{p_1}}$$

成立的唯一 t，将(1)中的 θ 分别替换为 $\theta-\varepsilon$ 和 $\theta+\varepsilon$，得到

$$\lambda_f(t) \le \frac{\|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}^{p_0(1-\theta+\varepsilon)}\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}^{p_1(\theta-\varepsilon)}}{t^{p_0(1-\theta+\varepsilon)+p_1(\theta-\varepsilon)}}$$

and

$$\lambda_f(t) \le \frac{\|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}^{p_0(1-\theta-\varepsilon)}\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}^{p_1(\theta+\varepsilon)}}{t^{p_0(1-\theta-\varepsilon)+p_1(\theta+\varepsilon)}}$$

因此，

$$\begin{aligned}\lambda_f(t) &\le \min\left\{\frac{\|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}^{p_0(1-\theta+\varepsilon)}\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}^{p_1(\theta-\varepsilon)}}{t^{p_0(1-\theta+\varepsilon)+p_1(\theta-\varepsilon)}}, \frac{\|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}^{p_0(1-\theta-\varepsilon)}\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}^{p_1(\theta+\varepsilon)}}{t^{p_0(1-\theta-\varepsilon)+p_1(\theta+\varepsilon)}}\right\} \\ &\le \frac{\|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}^{p_0(1-\theta)}\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}^{p_1\theta}}{t^{p_0(1-\theta)+p_1\theta}} \min\left\{\frac{t^{p_1\varepsilon}\|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}^{p_0\varepsilon}}{t^{p_0\varepsilon}\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}^{p_1\varepsilon}}, \frac{t^{p_0\varepsilon}\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}^{p_1\varepsilon}}{t^{p_1\varepsilon}\|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}^{p_0\varepsilon}}\right\}\end{aligned}$$

结合 t_0 的选取可得对某些依赖于 p_0, p_1, ε 的 $\delta > 0$ ，有

$$\lambda_f(t) \le \frac{\|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}^{p_0(1-\theta)}\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}^{p_1\theta}}{t^{p_0(1-\theta)+p_1\theta}} \min\left\{\frac{t}{t_0}, \frac{t_0}{t}\right\}^{\delta}$$

因此，

$$\lambda_f(t)t^{p_0(1-\theta)+p_1\theta}\frac{1}{t} \le \|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}^{p_0(1-\theta)}\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}^{p_1\theta} \min\left\{\frac{t}{t_0}, \frac{t_0}{t}\right\}^{\delta}\frac{1}{t}$$

两边关于 t 从 0 到 ∞ 积分可得，对某些常数 $C_{p_0,p_1,\theta}$ 有

$$\|f\|_{L^{p_\theta}(X)} \le C_{p_0,p_1,\theta}B_\theta$$

□

注：以上证明有可能是错的，主要看下一种证明方法。

证明：

$$\|f\|_{L^{p_\theta,\infty}(X)} \le \|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}^{1-\theta}\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}^{\theta}$$

证明. 根据 $\|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}$ 和 $\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}$ 的性质有

$$\lambda_f(t) \le \frac{\|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}^{p_0}}{t^{p_0}}$$

$$\lambda_f(t) \le \frac{\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}^{p_1}}{t^{p_1}}$$

对于任意的 $t>0$ 成立

$$\lambda_f(t) \le \frac{\|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}^{p_0(1-\hat{\theta})}\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}^{p_1\hat{\theta}}}{t^{p_0(1-\hat{\theta})+p_1\hat{\theta}}} \tag{2}$$

其中 $0<\hat{\theta}<1$，令 $\hat{\theta} = \dfrac{p_0\theta}{p_0\theta+p_1(1-\theta)}$，从 p_θ 的定义，我们有 $p_\theta = \dfrac{p_0p_1}{p_0\theta+p_1(1-\theta)}$，那么

$$p_0(1-\hat{\theta}) + p_1\hat{\theta} = p_0\frac{p_1(1-\theta)}{p_0\theta+p_1(1-\theta)} + p_1\frac{p_0\theta}{p_0\theta+p_1(1-\theta)} = p_\theta$$

这意味着

$$t^{p_\theta}\lambda_f(t) \le \|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}^{p_0(1-\hat{\theta})}\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}^{p_1\hat{\theta}}$$

注意到

$$\frac{p_0(1-\hat{\theta})}{p_\theta}=p_0\frac{p_1(1-\theta)}{p_0\theta+p_1(1-\theta)}\frac{1}{p_\theta}=1-\theta$$

$$\frac{p_1(\hat{\theta})}{p_\theta}=\frac{p_1p_0\theta}{p_0\theta+p_1(1-\theta)}\frac{1}{p_\theta}=\theta$$

两边同时 $\frac{1}{p_\theta}$ 次方，得到

$$t\lambda_f(t)^{\frac{1}{p_\theta}}\leq\|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}^{1-\theta}\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}^{\theta}$$

即是

$$\|f\|_{L^{p_\theta,\infty}(X)}\leq\|f\|_{L^{p_0,\infty}(X)}^{1-\theta}\|f\|_{L^{p_1,\infty}(X)}^{\theta}$$

□